

Серия
монографий и исследований
по
НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

№ 1

Э. КАРТАН

ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ
ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

ТЕОРИЯ ГРУПП И ГЕОМЕТРИЯ

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА,
ОСНОВАННЫЕ НА ПОНЯТИИ
ПЛОЩАДИ

КАЗАНЬ

1939

Э. КАРТАН

ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ
ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

E. CARTAN

LES GROUPES D'HOLONOMIE DES ESPACES
GÉNÉRALISÉS

(Acta Mathematica, t. 48, 1926, p. 1—42)



Э. Картан



Группы голономии обобщенных пространств.

Э. Картан.

ВВЕДЕНИЕ.

1. За последнее время мною была построена общая теория пространств, включающая в себя как классическую теорию многообразий Римана, так и более новую теорию пространств Вейля¹⁾. В некоторых вопросах различные авторы, в частности Скоутен, создали аналогичные обобщения, однако моя основная идея существенно отличается от их идей. Вместо того, чтобы обобщать более или менее естественным образом законы параллельного переноса векторов, я поставил своей целью расширение глубокого принципа Клейна, согласно которому каждая геометрия является изучением свойств некоторой группы преобразований G : *континуум*, к которому принадлежат фигуры, изучаемые этой геометрией, и у которых считаются существенными свойства, остающиеся инвариантными при любом преобразовании группы G , называется *пространством*²⁾ с *фундаментальной группой* G .

Рассмотрим n -мерный континуум и группу преобразо-

¹⁾ C. R. Acad. Sc. Paris, t. 174, 1922, p. 437, 593, 734, 857, 1104; Ann. Ec. Norm. sup., 3-e série, t. 40, 1923, p. 325—412; t. 41, 1924, p. 1—25; t. 42, 1925, p. 17—88; Ann. Soc. pol. de Math., t. 2, 1923, p. 171—221; Bull. Soc. Math. de France, t. 52, 1924, p. 205—241; Bull. Sc. Math., t. 48, 1924, p. 294—320; Enseign. math., 1924-5, p. 5—18.

²⁾ Термин *пространство* противопоставляется здесь термину *континуум*; первый из них подразумевает идею геометрической упорядоченности, которой нет у второго понятия (или только в зачаточном состоянии).

ваний G с n переменными¹⁾. Вообразим, что каждой точке континуума отнесено пространство с фундаментальной группой G , к которому принадлежит эта точка A ; пусть задан также некоторый закон, устанавливающий соответствие между пространствами в двух бесконечно близких точках континуума. Благодаря этому закону соответствия часть континуума, бесконечно близкая с A , может быть рассматриваема как часть пространства с фундаментальной группой G (с точностью до бесконечно-малых 2-го порядка), а пространство, отнесенное точке A , может быть названо *касательным* к континууму в A . Если мы рассмотрим в континууме непрерывный путь, соединяющий точки A и B , то соответствие между пространствами в точках B и A может быть установлено шаг за шагом вдоль рассматриваемого пути, и можно сказать, что мы производим *развертывание* пути AB и касательных пространств (или, если угодно, части континуума, бесконечно близкой к пути AB) на пространство, касательное в точке A . Следует отметить, что, если взять другой путь из точки A в B , то мы получим, вообще говоря, результат развертывания, отличный от первого. Мы будем говорить, что рассматриваемый континуум с определенным в нем законом связи бесконечно близких касательных пространств образует *неголономное пространство с фундаментальной группой G* . Неголономность выражается в следующем: если точка P описывает в континууме замкнутый контур (цикл), выходящий из A и возвращающийся в эту точку, то при развертывании конечное положение соответствующей точки P' с ее окрестностью будет отлично от начального; перемещение (преобразование группы G), которое переводит начальное положение в конечное, мы будем называть *перемещением, соответствующим заданному циклу*.

Мною было доказано, что перемещения, соответствующие различным циклам, образуют непрерывную группу g (подгруппу фундаментальной группы), и что эта группа

1) Можно было бы встать на более общую точку зрения—предполагать, что число переменных в группе G отлично от числа измерений континуума.

является существенно одной и той же при любом выборе точки A в неголономном пространстве (теорема однородности)¹⁾. Группа g , которую я буду называть *группой голономии* пространства, должна играть, как мне кажется, существенную роль в теории неголономных пространств. В своем докладе: „Теория групп и современные исследования в дифференциальной геометрии“, сделанном на конгрессе в Торонто²⁾, я указал на ряд результатов, которые я предполагаю изложить в настоящей работе. Установив некоторые общие теоремы, которые имеют применение в дальнейшем исследовании, я показываю, каким образом можно определить все группы голономии метрических и нормальных конформных пространств 3 измерений, а также проективных нормальных двумерных пространств. В конце работы я показываю, как топологические вопросы естественным образом проникают в эту область исследований.

I.

Общие теоремы.

2. Условимся обозначать через E_A голономное пространство, касательное в точке A , через $\mathfrak{E}$ — данное неголономное многообразие. Будем предполагать, что фундаментальная группа G задана в определенной аналитической форме, обусловленной с точки зрения геометрии выбором определенной системы отнесения — *репера*. *Нормальным репером* в пространстве E с фундаментальной группой G мы будем называть репер, который получается из исходного при помощи произвольного преобразования группы G (преобразования координат тогда выражаются преобразованиями группы G). Таким образом, если даны два нормальных репера (R) и (R') , формулы, при помощи которых производится переход от координат точки, отнесенной к (R') , к координатам этой точки, отнесенной к (R) , определяют

¹⁾ Ann. Ec. Norm. sup.; t. 42, 1925, p. 19, VI глава.

²⁾ Этот доклад опубликован в l'Enseignement mathématique, loc. cit.

в аналитической форме преобразование S группы; можно сказать также, что S есть *перемещение*, которое переводит (R) в (R') .

Выберем нормальный репер в пространстве E_A , касательном в точке A . После обхода цикла с началом и концом в A , репер (R_A) займет в пространстве E_A новое положение (R'_A) ; обозначим через T перемещение (преобразование группы G), которое переводит (R_A) в (R'_A) . Совокупность преобразований T образует группу голономии g , соответствующую точке A . Если мы выберем в пространстве E_A другой нормальный репер $(\bar{R}_A)$, этот репер после обхода того же цикла займет положение $(\bar{R}'_A)$. Пусть S —перемещение, которое переводит (R_A) в $(\bar{R}_A)$, т. е. с *аналитической точки зрения*—преобразование, реализующее преобразование координат при переходе от (R_A) к $(\bar{R}_A)$; перемещение, переводящее (R'_A) в $(\bar{R}'_A)$, *аналитически* выражается тем же преобразованием S , так что перемещение, переводящее (R_A) в $(\bar{R}'_A)$, определяется преобразованием $S^{-1}TS$. Таким образом, если выбрать в пространстве E_A за репер $(\bar{R}_A)$, вместо (R_A) , группа g заменится группой $S^{-1}gS$, *гомологичной* g .

Возьмем теперь вторую точку B в пространстве $\mathbb{E}$, и пусть (R_B) —нормальный репер в пространстве E_B . Установим соответствие между пространством E_B и E_A по какому-нибудь определенному пути ACB , соединяющему A с B ; репер (R_B) тогда будет помещен в пространстве E_A ; обозначим через S перемещение, переводящее (R_A) в (R_B) . Пусть BDB —цикл с началом в B и T —преобразование группы G , соответствующее этому циклу и переводящее (R_B) в (R'_B) . При обходе цикла $ACBDBCA$, в котором путь от A к B проходится 2 раза в противоположных направлениях, репер (R_A) переводится сначала в (R_B) , затем в (R'_B) и наконец в (R'_A) , причем (R'_A) расположен относительно (R'_B) так же, как (R_A) относительно (R_B) , т. е. получается из (R'_B) при помощи преобразования S^{-1} . Другими словами, каждому преобразованию T группы, отнесенной к точке B , соответствует преобразование $S^{-1}TS$ группы,

отнесенной точке A ; обратное доказывается аналогично. *Группы, соответствующие точкам A и B , гомологичны.*

Наконец, можно выбрать в различных пространствах E_A нормальные реперы (R_A) таким образом, чтобы группы, соответствующие различным точкам, были одинаковыми. В самом деле, выберем в фиксированной точке A_0 нормальный репер (R_{A_0}) ; в качестве нормального репера (R_A) в пространстве E_A возьмем тот репер, который будет совпадать с (R_{A_0}) , если установить соответствие E_A с E_{A_0} по некоторому определенному пути. Из предыдущих рассуждений вытекает, что мы получим во всех точках A одну и ту же группу G .

Это устанавливает также следующий очень важный результат. Соединим две точки A и B некоторым путем (C) ; пусть (C_A) — путь, который мы провели из точки A_0 в A для определения репера (R_A) , (C_B) — аналогичный путь, относящийся к точке B . Рассмотрим, наконец, цикл с началом в точке A , состоящий из путей (C) , $(-C_B)$ и (C_A) . Проходя сначала путь (C) , мы устанавливаем соответствие пространства E_B с E_A , причем от (R_A) к (R_B) мы переходим при помощи определенного преобразования S группы G ; проходя затем пути $(-C_B)$ и (C_A) , мы установим соответствие E_{A_0} с E_B , затем E_A с E_{A_0} , причем приводим в совмещение (R_B) с (R_{A_0}) , затем (R_A) с (R_{A_0}) ; конечный результат заключается в установлении перемещения S для R_A в E_A . Отсюда вытекает, что S принадлежит к группе g . Так как это заключение имеет место и для точки B , бесконечно близкой к A , можно формулировать следующую теорему:

Если неголономное пространство $\mathcal{E}$ с фундаментальной группой G имеет группу голономии g , можно выбрать в каждой его точке нормальный репер таким образом, что связность пространства аналитически выражается так же, как связность с фундаментальной группой g . Связностью называется закон соответствия бесконечно близких голономных касательных пространств; аналитически этот закон выражается бесконечно-малым преобразованием фундамен-

тальной группы, приводящим в соответствие реперы в двух бесконечно близких точках.

Бесконечно-малому циклу с началом A соответствует бесконечно-малое преобразование группы G . Оно принадлежит, в зависимости от выбора репера (R_A) , группе g или одному из ее гомологов. Если группа g инвариантна в G , все ее гомологи совпадают с ней, и бесконечно-малое преобразование принадлежит к g .

Обратно, если все бесконечно-малые преобразования, соответствующие различным бесконечно-малым циклам, проведенным в $\mathfrak{E}$, принадлежат инвариантной подгруппе g группы G , то группой голономии пространства является g или одна из ее подгрупп. Строгое аналитическое доказательство этой теоремы будет дано дальше; теперь же мы дадим в интуитивной форме суть этого доказательства. Оно основывается, в сущности, на следующем факте: если взять цикл $ABCD A$ и разложить его на 2 новых цикла $ABDA$ и $BCDB$, соединяя точки B и D некоторым путем, и если преобразование, соответствующее каждому из этих частичных циклов, принадлежит к инвариантной подгруппе g , то же самое имеет место для преобразования, соответствующего полному циклу.

В самом деле, пусть (R_A) и (R_D) — реперы в точках A и D , T — преобразование группы g , соответствующее циклу $ABDA$ и определенное аналитически относительно (R_A) ; T' — преобразование группы g , соответствующее циклу $DBCD$ и определенное аналитически относительно (R_D) ; пусть, наконец, S — преобразование группы G , которое переводит (R_A) в (R_D) при установлении соответствия E_D с E_A по пути AD . Нетрудно видеть, что преобразование, соответствующее полному циклу $ABCD A$, или $ABDADB CD A$, и отнесенное к реперу (R_A) , равно

$$S^{-1}T'ST;$$

следовательно, т. к. g — инвариантная подгруппа, оно принадлежит к g . Разлагая данный цикл на циклы все более мелкие, можно показать, что, если преобразования, соответствующие всем бесконечно-малым циклам, принадлежат

к g , конечные преобразования, соответствующие конечным циклам, также принадлежат g .

3. *Определить, является ли группа голономии пространства $\mathfrak{E}$ данной подгруппой g фундаментальной группы G .* Предположим сначала, что данная группа g является инвариантной подгруппой группы G . Для того, чтобы группа голономии пространства $\mathfrak{E}$ была g (или одной из ее подгрупп), необходимо и достаточно, чтобы бесконечно-малое преобразование, соответствующее любому бесконечно-малому циклу, принадлежало к g .

Если g не инвариантна в G , пусть g' — наибольшая подгруппа G , содержащая g как инвариантную подгруппу. Пусть r — порядок G , ρ и $\rho' \geq \rho$ — порядки g и g' . Существует $\infty^{r-\rho'}$ различных групп, гомологичных g в G . Первое условие того, чтобы пространство $\mathfrak{E}$ допускало g в качестве группы голономии, заключается в том, что бесконечно-малое преобразование, соответствующее любому бесконечно-малому циклу, принадлежит к g или к одному из ее гомологов. Это необходимое условие не является достаточным, если g не представляет собой инвариантную подгруппу G .

Предположим сначала, что бесконечно-малое преобразование, соответствующее бесконечно-малому циклу, принадлежит только к одной подгруппе, гомологичной g . Тогда можно изменением выбора реперов в точках пространства $\mathfrak{E}$ достигнуть того, что это бесконечно-малое преобразование будет принадлежать к самой подгруппе g ; можно было бы даже применить к каждому из этих реперов произвольное преобразование группы g' . Чтобы группа голономии была g , необходимо, чтобы можно было выбрать реперы таким образом, чтобы связность пространства выражалась аналитически так же, как у пространства с фундаментальной группой g . Пусть тогда S — бесконечно-малое преобразование группы G , которое переводит репер (R_A) , отнесенный точке A , в репер $(R_{A'})$, принадлежащий бесконечно близкой точке A' . Если заменить соответственно (R_A) и $(R_{A'})$ реперами $(\bar{R}_A)$ и $(\bar{R}_{A'})$, получаемыми из первых

преобразованиями Σ_A и $\Sigma_{A'}$ группы g' , переход от $(\bar{R}_A)$ к $(\bar{R}_{A'})$ осуществится преобразованием $\Sigma_{A'}^{-1}\Sigma_A$, и это преобразование должно принадлежать к g . *Необходимо, таким образом, чтобы преобразования S сами принадлежали к g'* ; это—новые искомые необходимые условия. Эти условия являются, кроме того, и достаточными, т. к., если они выполнены, то пространство имеет аналитическую связность пространства с фундаментальной группой g' , а т. к. бесконечно-малое преобразование, соответствующее любому бесконечно-малому циклу, принадлежит к подгруппе g , инвариантной в g' , то группой голономии пространства $\mathfrak{E}$ является g или одна из ее подгрупп.

Предположим теперь, что бесконечно-малое преобразование, соответствующее бесконечно-малому циклу, принадлежит к бесконечному числу подгрупп, гомологичных g . Можно всегда предположить, преобразуя в случае необходимости реперы, что оно принадлежит, в частности, и самой подгруппе g . Но лучше воспользоваться репером, зависящим от такого числа произвольных параметров $a_1, a_2, \dots, a_n$, от какого зависит семейство подгрупп, гомологичных g , к которому принадлежит рассматриваемое бесконечно-малое преобразование, так что каждая из этих гомологичных подгрупп приводится к g для одного из этих реперов и *только одного*. Затем следует выразить, как и в первом случае, условие, что преобразование группы G , которое совмещает два бесконечно близких репера (R_A) и $(R_{A'})$, принадлежит к g' ; это даст нам систему уравнений и конечных и дифференциальных относительно неизвестных $a_1, a_2, \dots, a_n$. *Необходимо, чтобы эти уравнения были совместны; это условие является также и достаточным.*

4. Аналитически проблема может быть представлена следующим образом. Пусть

$$X_1 f, X_2 f, \dots, X_r f$$

бесконечно-малые преобразования, определяющие группу

G , с классическими соотношениями:

$$(X_i X_j) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{ijs} X_s f.$$

Пусть каждое пространство E_A , касательное к $\mathfrak{E}$, отнесено к некоторому реперу (R_A) . Когда мы установим соответствие бесконечно близкого пространства $E_{A'}$ с пространством E_A , точка с координатами $(x_1, \dots, x_n)$ пространства E_A совпадет с точкой $(x_i + dx_i)$ пространства $E_{A'}$. Имеем соотношения:

$$dx_i + \sum_{k=1}^{k=r} \omega_k X_k(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где ω_k — формы Пфаффа, линейные относительно дифференциалов n переменных $u_1, \dots, u_n$, определяющих положение точки A в континууме $\mathfrak{E}$. Если пространство $\mathfrak{E}$ голономно то

$$\omega_i' = \sum_{(j, k)} c_{jki} [\omega_j \omega_k];$$

для неголономного пространства имеем

$$\omega_i' = \sum_{(j, k)} c_{jki} [\omega_j \omega_k] + \mathcal{Q}_i,$$

где $\mathcal{Q}_i$ — знакопеременные формы 2-го порядка от

$$du_1, du_2, \dots, du_{n-1})$$

Предположим теперь, что группа g определяется первыми p операторами $X_1 f, \dots, X_p f$. g является группой голономии пространства $\mathfrak{E}$ тогда и только тогда, если можно выбрать реперы (R_A) так, чтобы тождественно

$$\omega_{p+1} = \omega_{p+2} = \dots = \omega_r = 0.$$

Для этого отнесем каждой точке пространства $\mathfrak{E}$ наиболее

¹⁾ E. Cartan, Ann. Ec. Norm. Sup., 3-e série, t. 40, 1923, p. 383—390.

общий репер, зависящий, следовательно, от r параметров $v_1, v_2 \dots v_r$ (дополнительные параметры). Нашей задачей является определение этих параметров в функции от $u_1, \dots, u_n$ так, чтобы

$$(1) \quad \omega_{r+1} = \omega_{r+2} = \dots = \omega_r = 0.$$

Условия интегрируемости дают непосредственно

$$(2) \quad \Omega_{r+1} = \Omega_{r+2} = \dots = \Omega_r = 0.$$

Это—условия, относящиеся к бесконечно-малым преобразованиям, соответствующим бесконечно-малым циклам. Если группа g инвариантна в G , эти условия, очевидно, не зависят от выбора реперов, т. е. не зависят от параметров $v_1, v_2, \dots, v_r$; таким образом, они или *несовместны*, или выполняются *тождественно*. Во втором случае система (1) полностью интегрируема, и группой голономии является g или одна из ее подгрупп. Чтобы в пространстве $\mathfrak{E}$ ввести связность пространства с фундаментальной группой g , следует проинтегрировать систему (1) или, что приводится к тому же, систему Ли, соответствующую группе G/g , метрически изоморфной с G . Если g содержит $(r-1)$ параметров, достаточна одна квадратура; если группа G/g —простая с тремя параметрами, задача приводится к интегрированию уравнения Риккати и т. д.

Если группа g не инвариантна, условия интегрируемости (2), если они совместны, *не приводят к тождествам*; действительно, в противном случае бесконечно-малое преобразование, соответствующее произвольному бесконечно-малому циклу, принадлежало бы к g и ко всем подгруппам, гомологичным g , следовательно, и к группе γ , образованной из их общих преобразований и являющейся инвариантной подгруппой группы G . Таким образом, группой голономии была бы не g , а γ или одна из ее подгрупп. Так как условия интегрируемости (2) не выполняются тождественно, то они позволяют выразить определенное число дополнительных параметров $v_1, \dots, v_r$ в функции от других и переменных u_i . Вставляя в уравнения (1), мы получим

систему r уравнений с меньшим, чем r , числом неизвестных, что даст новые условия совместности, и так далее.

5. *Пространства без кручения.* Наиболее важными для приложений являются пространства без кручения; они характеризуются тем свойством, что бесконечно-малое преобразование, соответствующее произвольному бесконечно-малому циклу с началом в точке A , оставляет A инвариантной. Отсюда следует, что группа голономии g такого пространства должна содержать, по крайней мере, одно бесконечно-малое преобразование, отличное от нулевого и оставляющее инвариантной произвольную точку пространства. Можно также добавить, что эти бесконечно-малые преобразования не могут все принадлежать к одной и той же инвариантной подгруппе γ группы g ; в самом деле, в противном случае группой голономии являлась бы γ или одна из ее подгрупп.

Некоторые пространства обладают тем свойством, что бесконечно-малое преобразование, соответствующее любому циклу с началом в точке A , не только оставляет неподвижной точку A , но и является преобразованием *второго порядка* в этой точке, т. е. коэффициенты этого бесконечно-малого преобразования и *их частные производные первого порядка* обращаются в нуль в точке A . Это свойство влечет за собой ограничения для группы голономии, аналогичные указанным выше.

II.

Группы голономии двумерных метрических пространств без кручения.

6. Метрическим пространством называется неголономное многообразие, у которого фундаментальная группа состоит из движений и подобных преобразований. В случае двумерного пространства мы выберем изотропные декартовы оси координат, так что группа G определяется следующими бесконечно-малыми преобразованиями:

$$Xf = xp + yq, \quad X_{12}f = xp - yq, \quad X_1f = p, \quad X_2f = q,$$

где через p и q обозначены $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Составляющими метрической связности являются формы Пфаффа

$$\omega, \omega_{12}, \omega_1, \omega_2.$$

При установлении соответствия между 2 евклидовыми плоскостями, касательными в бесконечно близких точках A и A' , отношение единиц длины, выбранных в A' и A , равно $1 + \omega$. Форма ω_{12} определяет угол, на который надо повернуть (R_A) , чтобы привести его в положение $(R_{A'})$;

$$\omega_1 \text{ и } \omega_2$$

являются составляющими в (R_A) бесконечно-малого вектора $\overrightarrow{AA'}$. Наконец, квадрат длины этого вектора, измеренной относительно (R_A) , равен $ds^2 = \omega_1 \omega_2$.

Предположим сначала, что группа голономии пространства $\mathfrak{E}$ без кручения трансформирует векторы (с составляющими x, y) преобразованиями двучленной группы

$$xp, yq;$$

группа g содержит, самое меньшее, 3 параметра; в противном случае она не содержала бы ни одного бесконечно-малого преобразования, оставляющего неподвижной произвольную точку. С другой стороны, если бы она имела 3 параметра, то принадлежала бы к одной из групп:

$$xp, yq, p \text{ или } xp, yq, q,$$

т. е. можно было бы применить то же рассуждение. Таким образом, в рассматриваемом случае мы получаем группу общего вида:

(I)

$$\boxed{xp, yq, p, q}.$$

Предположим теперь, что группа голономии g трансформирует векторы преобразованиями одночленной группы, за которую можно всегда выбрать

$$xp + tq.$$

Группа g тогда имеет только одно бесконечно-малое пре-

образование, оставляющее инвариантной неподвижную точку (x_0, y_0) , именно

$$(x - x_0)p + m(y - y_0)q.$$

Если m отлично от нуля, группа определяется операторами

$$(II) \quad \boxed{xp + m y q, p, q}.$$

Если же m равно нулю, бесконечно-малое преобразование, соответствующее бесконечно-малому циклу, принадлежит всегда к подгруппе

$$xp, p,$$

инвариантной в группе

$$xp, p, q,$$

которая может быть рассматриваема как фундаментальная группа пространства. Следовательно, группой голономии является

$$(III) \quad \boxed{xp, p}.$$

Наконец, невозможно, чтобы группа голономии оставляла инвариантными все векторы, т. к. она являлась бы группой переносов или одной из ее подгрупп и не содержала бы ни одного бесконечно-малого преобразования, оставляющего инвариантной произвольную точку.

Следует отметить, что группой голономии является во всех случаях или G или инвариантная подгруппа этой группы.

7. Очень легко установить, в каком случае группой голономии является (II) или (III). Возьмем в каждой точке A пространства $\mathfrak{E}$ оси с началом в точке A ; по предположению, что пространство без кручения, имеем

$$\Omega_1 = 0, \Omega_2 = 0.$$

В случае II мы получаем

$$\Omega - \Omega_{12} = m(\Omega + \Omega_{12}) \quad \text{или} \quad (1 - m)\Omega = (1 + m)\Omega_{12};$$

отношение двух форм Ω и Ω_{12} должно быть, таким образом, постоянным, отличным от 1 (но оно может быть равно

нулю или бесконечности). В случае (III) это отношение должно быть равно 1. Эти условия являются необходимыми и достаточными (при условии, что формы Ω и Ω_{12} не равны обе тождественно нулю).

Определение всех пространств $\mathfrak{E}$ с группой голономии (II) производится без затруднения; мы должны иметь:

$$\omega_1' = [\omega_1 \tilde{\omega}], \quad \omega_2' = m [\omega_2 \tilde{\omega}], \quad \tilde{\omega}' \neq 0.$$

Предположим сначала $m = -1$ (группа голономии является тогда группой движений): мы получаем двумерное пространство Римана, определяемое произвольной квадратичной формой ds^2 с двумя переменными.

Если $m \neq -1$, можно положить

$$\omega_1 = H du, \quad \omega_2 = \frac{1}{H} dv, \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{m} \frac{\partial \log H}{\partial u} du - \frac{\partial \log H}{\partial v} dv.$$

Пространство Вейля определяется, таким образом, двумя формами:

$$(II) \quad ds^2 = du dv, \quad \omega = \frac{1+m}{2} \tilde{\omega} = \frac{m+1}{2m} \frac{\partial \log H}{\partial u} du - \frac{m+1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial v} dv;$$

оно зависит от одной произвольной функции двух аргументов.

Если группой голономии является группа (III), имеем

$$\omega_1' = [\omega_1 \omega], \quad \omega_2' = 0, \quad \omega' \neq 0.$$

Можно положить:

$$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = dv, \quad \omega = H du;$$

пространство Вейля определяется двумя формами

$$(III) \quad ds^2 = du dv, \quad \omega = H du;$$

оно зависит от одной произвольной функции 2 аргументов.

Отметим частный случай группы голономии

$$xp + yq, \quad p, q$$

(группы подобных преобразований); в соответствующих пространствах можно определить абсолютным образом параллелизм двух направлений.

III.

Трехмерные метрические пространства без кручения.

8. Фундаментальной группой G является 7-членная группа движений и подобных преобразований евклидова пространства. Предполагая уравнение изотропного конуса приведенным к виду:

$$z^2 + 2xy = 0,$$

имеем для группы G следующие операторы:

$$Uf = xp + yq + zr,$$

$$X_{23}f = yr - zp, \quad X_{31}f = zq - xr, \quad X_{12}f = xp - yq,$$

$$X_1f = p, \quad X_2f = q, \quad X_3f = r.$$

Мы проведем классификацию групп голономии сообразно с законом преобразования при этих группах векторов пространства.

9. *Предположим, что векторы преобразуются 4-членной группой*

$$xp + yq + zr, \quad yr - zp, \quad zq - xr, \quad xp - yq.$$

Если группа g содержит параллельный перенос, то она включает в себя все три оператора переноса, и мы получаем общую группу G :

$$(I) \quad \boxed{xp + yq + zr, \quad yr - zp, \quad zq - xr, \quad xp - yq, \quad p, \quad q, \quad r}.$$

Если группа g не содержит переносов, она зависит от 4 параметров, но тогда единственное бесконечно-малое преобразование, оставляющее неподвижной произвольную точку, принадлежит к *инвариантной* подгруппе с 3 параметрами, что невозможно.

10. Предположим, что векторы преобразуются 3-членной группой.

Возможны два случая:

$$X_{23}f, X_{31}f, X_{12}f,$$

или

$$Uf, X_{31}f, X_{12}f.$$

В первом случае группа голономии является или группой движений

$$(II) \quad \boxed{yr - zp, zq - xr, xp - yq, p, q, r}$$

или одной из ее подгрупп. Но существование в g параллельного переноса влечет за собой существование всех остальных. Единственно возможной подгруппой является группа вращений около неподвижной точки

$$(III) \quad \boxed{yr - zp, zq - xr, xp - yq}.$$

Во втором случае группой голономии является или группа

$$(IV) \quad \boxed{xp + yq + zr, zq - xr, xp - yq, p, q, r}$$

или одна из ее подгрупп. Во всех случаях пространство E может быть рассматриваемо как многообразие с фундаментальной группой (IV).

Если группа голономии содержит перенос $ap + bq + cr$, то она содержит, на основании композиции, и переносы $ar - cq$ и aq . Невозможно, чтобы она не содержала переноса, для которого $a \neq 0$; в самом деле, иначе g была бы, как нетрудно видеть, подгруппой группы

$$xp + yq + zr, zq - xr, xp - yq, q, r;$$

каждое бесконечно-малое преобразование, оставляющее инвариантной произвольную точку (x_0, y_0, z_0) , принадлежало бы тогда к инвариантной подгруппе

$$2yq + zr, zq - xr, q, r,$$

и группа голономии, которая являлась бы этой группой или одной из ее подгрупп, не преобразовывала бы векторы 3-членной группой. Следовательно, во втором рассматриваемом случае единственно возможной группой голономии является группа (IV); это наибольшая группа, оставляющая инвариантным изотропное направление $x = z = 0$.

11. *Предположим, что векторы преобразуются 2-членной группой.* Эта группа имеет один из следующих видов:

$$zq - xr, (m + n)xp + (m - n)uq + m zr$$

или

$$xp + uq + zr, \quad xp - uq.$$

В первом случае группой голономии является группа:

$$(V) \quad \boxed{zq - xr, (m + n)xp + (m - n)uq + m zr, p, q, r} \quad (m + n \neq 0),$$

или одна из ее подгрупп. Группа голономии может быть (V) только в том случае, если коэффициент $m + n$ не равен нулю; действительно, в противном случае бесконечно-малые преобразования, оставляющие инвариантной произвольную точку (x_0, y_0, z_0) , принадлежали бы все к инвариантной подгруппе

$$zq - xr, 2uq + zr, q, r,$$

что невозможно.

Каждая подгруппа группы (V) может содержать только два независимых параллельных переноса; но существование переноса $p + aq + br$ влечет за собой существование переносов $r - bq$ и q . Таким образом, возможны только два случая: или существуют переносы q и r , или только один перенос q .

Предположим сначала, что $m + n \neq 0$, и что группа g 4-членна; она приводима к виду

$$zq - xr + \alpha p, (m + n)xp + (m - n)uq + m zr + \beta p, q, r,$$

с условием

$$(m + 2n)\alpha = 0.$$

Коэффициент α не может быть нулем, т. к. иначе единственные бесконечно-малые преобразования, оставляющие инва-

риантной произвольную точку, принадлежали бы к инвариантной подгруппе

$$zq - xr, q, r.$$

Таким образом, $m + 2n = 0$, и мы получаем группу

$$(VI) \quad \boxed{zq - xr + p, xp + 3yq + 2zr, q, r}.$$

Если группа g была бы 3-членна, она содержала бы только перенос q , но тогда никакое бесконечно-малое преобразование не оставляло бы инвариантной произвольную точку.

Предположим теперь, что $m + n = 0$; мы получаем 2 возможных группы

$$(VII) \quad \boxed{zq - xr, 2yq + zr, q, r},$$

$$(VIII) \quad \boxed{zq - xr, 2yq + zr, q}.$$

Предположим теперь, что группа голономии преобразует векторы 2-членной группой

$$xp + yq + zr, xp - yq.$$

Если бы она не содержала всех переносов, то в нее входил бы один или два из переносов p, q, r . Если бы она не содержала переноса p , бесконечно-малые преобразования, оставляющие инвариантной произвольную точку, принадлежали бы всегда к инвариантной подгруппе

$$2yq + zr, q, r,$$

что невозможно. То же рассуждение пришлось бы повторить, если бы в ней не было одного из переносов q, r . Таким образом, имеем группу

$$(IX) \quad \boxed{xp + yq + zr, xp - yq, p, q, r}.$$

12. Предположим, что векторы преобразуются одночленной группой. Эта группа определяется или оператором

$$m(xp + yq + zr) + n(zq - xr),$$

или

$$m(xp + yq + zr) + n(xp - yq)$$

Мы можем здесь исключить ряд гипотез, замечая, что имеют место соотношения

$$\omega_1' = [(a_1\omega_1 + b_1\omega_2 + c_1\omega_3)\tilde{\omega}],$$

$$\omega_2' = [(a_2\omega_1 + b_2\omega_2 + c_2\omega_3)\tilde{\omega}],$$

$$\omega_3' = [(a_3\omega_1 + b_3\omega_2 + c_3\omega_3)\tilde{\omega}],$$

т. к. репер, относящийся к точке A , выбран таким образом, что его начало лежит в A .

Отсюда выводим, что форма $\tilde{\omega}'$ превращается в нуль одновременно с линейными формами $a_i\omega_1 + b_i\omega_2 + c_i\omega_3$. Так как $\tilde{\omega}'$ не может быть тождественно равна нулю (в противном случае группа голономии приводилась бы к тождественному преобразованию), необходимо, чтобы был равен нулю определитель $|a_i b_j c_k|$. Но его элементы являются коэффициентами в выражениях, стоящих при p, q, r в бесконечно-малом преобразовании, которое трансформирует векторы. Таким образом, имеем

$$\text{в первом случае } m = 0,$$

$$\text{во втором случае } m(m^2 - n^2) = 0.$$

В случае группы

$$zq - xr$$

группа g является подгруппой следующей группы:

$$zq - xr, p, q, r;$$

бесконечно-малое преобразование этой группы, оставляющее инвариантной точку (x_0, y_0, z_0) , есть $(z - z_0)q - (x - x_0)r$; группа g определяется, таким образом, следующими операторами:

$$(X) \quad \boxed{zq - xr, q, r},$$

которые дают инвариантную подгруппу предыдущей.

Если векторы преобразуются группой

$$xp - yq,$$

мы получаем аналогично предыдущему следующую группу голономии

$$(XI) \quad \boxed{xp - yq, p, q}.$$

Если, наконец, векторы преобразуются группой

$$2yq + zr,$$

группа голономии имеет следующий вид

$$(XII) \quad \boxed{2yq + zr, q, r}.$$

Итак, мы получили кроме тождественного преобразования (пространство Евклида) *двенадцать возможных групп голономии*.

Пространства Римана характеризуются тем, что их группами голономии является группа движений или одна из ее подгрупп. Возможные группы голономии следующие

$$(II), (III), (V) \text{ с } m = 0, (X), (XI);$$

число параметров равно соответственно

$$6, \quad 3, \quad 5, \quad \quad \quad 3, \quad 3.$$

IV.

Классификация трехмерных римановых пространств по их группам голономии.

13. Случай группы голономии (V):

$$zq - xr, \quad xp - yq, \quad p, \quad q, \quad r.$$

Это—наиболее общая группа движений, оставляющих инвариантным фиксированное изотропное направление (изотропное *стационарное* направление). Наибольшей подгруппой g' группы G , содержащей g как инвариантную подгруппу, является сама подгруппа g . (Мы предполагаем

a priori, что рассматриваемое пространство является многообразием Римана, т. е. что G является группой движений).

Чтобы выяснить, допускает ли данное риманово пространство группу g в качестве группы голономии, надо исследовать, имеет ли оно стационарное изотропное направление. Пусть

$$(3) \quad \begin{cases} \omega_1' = [\omega_1 \omega_{12}] - [\omega_3 \omega_{23}], \\ \omega_2' = -[\omega_2 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega_3' = -[\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_2 \omega_{23}] \end{cases}$$

уравнения структуры пространства, причем репер, соответствующий точке A , имеет в ней начало, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$ суть составляющие бесконечно-малого преобразования

$$\omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \omega_3 X_3 f + \omega_{12} X_{12} f + \omega_{23} X_{23} f + \omega_{31} X_{31} f,$$

переводящего репер (R_A) в бесконечно близкий репер $(R_{A'})$. Пусть

$$\frac{x}{-\frac{1}{2}t^2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{t}$$

— уравнения, определяющие изотропное направление (с направляющими параметрами $-\frac{1}{2}t^2, 1, t$). Это направление остается неизменным при установлении соответствия двух касательных пространств в бесконечно близких точках, если

$$(4) \quad dt + \omega_{23} + t\omega_{12} + \frac{1}{2}t^2\omega_{13} = 0.$$

Условием интегрируемости является соотношение:

$$(5) \quad \Omega_{23} + t\Omega_{12} + \frac{1}{2}t^2\Omega_{13} = 0.$$

Таким образом, для определения t мы имеем 3 уравнения второго порядка. Если они имеют общий корень, это означает, что бесконечно-малое преобразование, соответствующее произвольному бесконечно-малому циклу, принадлежит к группе g или к одному из ее гомологов. Преобразуем репер так, чтобы этот корень стал равным нулю, так

что форма Ω_{23} превратится в нуль. Тогда уравнение (4) должно удовлетворяться при $t=0$, то есть $\omega_{23}=0$. Пространство в этом случае имеет связность пространства с фундаментальной группой g .

Может случиться, что уравнение (5) удовлетворяется для двух различных значений t , которые можно всегда положить равными 0 и ∞ . Если одна и *только одна* из форм ω_{23} , ω_{13} равна нулю, группа голономии гомологична рассматриваемой группе. Если обе формы ω_{23} и ω_{13} равны нулю, группой голономии необходимо является группа

$$xp-yq, p, q, r$$

или одна из ее подгрупп.

Если мы привели связность пространства $\mathfrak{E}$ к связности многообразия с фундаментальной группой g , общие формулы (3) приводятся к следующим:

$$\begin{aligned}\omega_1' &= [\omega_1 \omega_{12}], \\ \omega_2' &= -[\omega_2 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega_3' &= -[\omega_1 \omega_{31}],\end{aligned}$$

причем

$$\omega_{12}' = \Omega_{12}, \quad \omega_{31}' = [\omega_{12} \omega_{31}] + \Omega_{31}.$$

Формы Ω_{12} и Ω_{31} удовлетворяют тождествам:

$$[\omega_1 \Omega_{12}] = 0, \quad [\omega_2 \Omega_{12}] - [\omega_3 \Omega_{31}] = 0, \quad [\omega_1 \Omega_{31}] = 0,$$

откуда получаем следующие общие выражения:

$$\begin{aligned}\Omega_{12} &= a [\omega_1 \omega_2] + b [\omega_3 \omega_1], \\ \Omega_{31} &= b [\omega_1 \omega_2] + c [\omega_3 \omega_1].\end{aligned}$$

Чтобы иметь общее выражение для ds^2 пространства, можно использовать неопределенность в выборе репера и положить:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= du, \quad \omega_3 = dw, \quad \omega_{12} = \alpha du, \quad \omega_{31} = \beta du, \\ \omega_2 &= dv + \frac{1}{2} H du,\end{aligned}$$

причем

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w}.$$

Таким образом, получаем формулу

$$(V) \quad ds^2 = d\omega^2 + 2dudv + H(u, v, \omega) du^2$$

с произвольной функцией H трех аргументов. Стационарное изотропное направление определяется соотношениями $du = d\omega = 0$.

Полученные римановы пространства могут быть реализованы как поверхности V_3 евклидова пространства 5 измерений.

Ограничимся указанием результата. Пусть

$$dx_3^2 + 2dx_1 dx_4 + 2dx_2 dx_5$$

—квадратичная форма евклидова пространства 5 измерений. Координаты точки $(x_1, x_2, \dots, x_5)$ многообразия V_3 определяются уравнениями

$$x_1 = U_1, \quad x_2 = U_2, \quad x_3 = \omega + U_3,$$

$$x_3 U_3' + x_4 U_1' + x_5 U_2' + U_4 = v,$$

$$x_3 U_3'' + x_4 U_1'' + x_5 U_2'' + U_4' = \frac{1}{2} H(u, v, \omega) - \frac{1}{2} U_3'^2,$$

где через U_1, U_2, U_3, U_4 обозначены четыре произвольных функции переменной u , ограниченные единственным условием, чтобы определитель $U_1' U_2'' - U_2' U_1''$ не был равен тождественно нулю. Линии многообразия V_3 , касательные в каждой их точке к стационарному изотропному направлению, являются изотропными прямыми, параллельными фиксированной изотропной плоскости.

14. *Случай группы голономии (III).* Это—группа вращений около неподвижной точки. Если для большей симметричности мы возьмем обычный прямоугольный репер, группа определится операторами

$$X_{23}f = yr - zq, \quad X_{31}f = zp - xr, \quad X_{12}f = xq - yp.$$

Чтобы выяснить, допускает ли данное риманово пространство, в каждой точке которого построен прямоугольный триэдр с началом в этой точке, указанную группу в каче-

стве группы голономии, достаточно исследовать, можно ли найти в каждом из касательных евклидовых пространств такую точку P , чтобы P , соответствующая точке A , совпала с точкой P' , соответствующей бесконечно близкой точке A' , когда мы будем устанавливать соответствие двух евклидовых пространств, касательных в A и A' . Будем исходить из формул:

$$(6) \quad \begin{cases} \omega_1' = [\omega_2 \omega_{21}] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega_2' = [\omega_1 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{32}], \\ \omega_3' = [\omega_1 \omega_{13}] + [\omega_2 \omega_{23}]; \end{cases} \quad (\omega_{ij} = -\omega_{ji})$$

пусть x, y, z координаты точки P , отнесенные к реперу R_A . Получаем:

$$(7) \quad \begin{cases} dx + \omega_1 + y\omega_{21} + z\omega_{31} = 0, \\ dy + \omega_2 + x\omega_{12} + z\omega_{32} = 0, \\ dz + \omega_3 + x\omega_{13} + y\omega_{23} = 0. \end{cases}$$

Условия интегрируемости имеют вид:

$$\begin{aligned} y\Omega_{21} + z\Omega_{31} &= 0, \\ x\Omega_{12} + z\Omega_{32} &= 0, \\ x\Omega_{13} + y\Omega_{23} &= 0, \end{aligned}$$

или

$$(8) \quad \frac{\Omega_{23}}{x} = \frac{\Omega_{31}}{y} = \frac{\Omega_{12}}{z}.$$

Таким образом, необходимо, чтобы три формы $\Omega_{23}, \Omega_{31}, \Omega_{12}$ отличались друг от друга только конечным множителем. Геометрически это выражает тот факт, что бесконечно-малое преобразование, соответствующее произвольному бесконечно-малому контуру, оставляет неподвижной точку x, y, z , а также начало координат, т. е. принадлежит к бесконечному числу подгрупп, гомологичных g .

Предположим, что эти условия выполнены. Мы можем так выбрать репер, чтобы $x = y = 0$. Уравнения (7) приводятся к следующим:

$$(9) \quad \begin{cases} \omega_1 + z\omega_{31} = 0, \\ \omega_2 + z\omega_{32} = 0, \\ dz + \omega_3 = 0. \end{cases}$$

Необходимо, чтобы два первых были совместны и чтобы полученное значение z удовлетворяло последнему. Эти условия достаточны. Первые два уравнения (9) не могут быть неопределенными относительно z , так как тогда формы ω_1 и ω_2 тождественно обращались бы в нуль, что невозможно.

Геометрически мы имеем для каждой точки A пространства $\mathfrak{E}$ выбранную ось z' ов репера с началом в A , направленную в стационарную точку P касательного пространства в A .

Обозначим z через $-\omega$. На основании уравнений (9), имеем

$$\omega_3 = d\omega,$$

$$\omega_1 = \omega\omega_{31},$$

$$\omega_2 = \omega\omega_{32};$$

на основании формул (6),

$$\omega_{31}' = [\omega_{32} \omega_{21}],$$

$$\omega_{32}' = [\omega_{31} \omega_{12}].$$

Форма $\omega_{31}^2 + \omega_{32}^2$ является, таким образом, дифференциальной квадратичной формой $d\sigma^2$ от двух переменных u, v , и мы имеем

(III)

$$ds^2 = d\omega^2 + \omega^2 d\sigma^2.$$

Полученные пространства Римана зависят от одной произвольной функции двух аргументов. Они могут быть реализованы трехмерными многообразиями в пространстве 4-х измерений. Достаточно найти в 3-мерном пространстве постоянной кривизны, равной 1, поверхность с линейным элементом, равным $d\sigma^2$. Полученные таким образом многообразия V_3 являются *гиперконусами*, у которых вершина изображает стационарную точку группы голономии.

Геометрические линии рассматриваемых римановых пространств получаются легко из геодезических линий формы $d\sigma^2$. В самом деле, если мы подчиним триэдр отнесения только тому условию, чтобы его ось z' ов проходила через стационарную точку, направляющие конусы произвольного

направления могут быть приведены к $(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$. Если мы выразим условие, чтобы это направление оставалось параллельным самому себе, когда мы передвигаемся по направлению

$$\frac{\omega_1}{\cos \alpha} = \frac{\omega_2}{0} = \frac{\omega_3}{\sin \alpha},$$

мы получим

$$d\alpha + \omega_{13} = 0, \quad \omega_{12} = 0.$$

Но уравнения

$$\omega_{32} = \omega_{12} = 0$$

определяют геодезические линии формы $d\sigma^2$. Если одна из этих геодезических найдена, мы определяем α при помощи квадратуры

$$\alpha = \int \omega_{31} = \sigma - \sigma_0,$$

затем получаем w из

$$\frac{dw}{w} = \operatorname{tg} \alpha \omega_{31} = \operatorname{tg} (\sigma - \sigma_0) d\sigma,$$

откуда

$$\frac{1}{w} = C \cos (\sigma - \sigma_0),$$

и, наконец,

$$ds = \frac{\omega_1}{\cos \alpha} = \frac{w d\sigma}{\cos (\sigma - \sigma_0)} = \frac{1}{C} \frac{d\sigma}{\cos^2 (\sigma - \sigma_0)},$$

$$s = \frac{1}{C} \operatorname{tg} (\sigma - \sigma_0) + s_0.$$

Эти результаты являются классическими в том частном случае, когда

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2;$$

в этом случае пространство евклидово, и его группа голономии приводится, конечно, к тождественному преобразованию.

15. *Случай группы голономии (X).* Группа голономии

$$zq - xr, \quad q, r$$

образована из движений, оставляющих инвариантной изотропную плоскость $x=0$ и все параллельные ей плоскости.

Чтобы определить, допускает ли данное риманово пространство эту группу как группу голономии, необходимо исследовать, существует ли семейство параллельных изотропных стационарных плоскостей. Сохраняя общие обозначения § 13, можно представить уравнение одной из этих плоскостей в виде

$$(10) \quad x + tz - \frac{1}{2} t^2 y + \theta = 0.$$

Если при установлении соответствия между касательными пространствами E_A и $E_{A'}$ точка (x, y, z) пространства E_A совпадет с точкой $(x + dx, y + dy, z + dz)$ пространства $E_{A'}$, мы получим

$$dx + \omega_1 + x\omega_{12} - z\omega_{23} = 0,$$

$$dy + \omega_2 - y\omega_{12} + z\omega_{31} = 0,$$

$$dz + \omega_3 - x\omega_{31} + y\omega_{23} = 0;$$

следовательно, изотропная плоскость (10) будет стационарна, если

$$dt + \omega_{23} + t\omega_{12} - \frac{1}{2} t^2 \omega_{31} = 0,$$

$$d\theta - \omega_1 - t\omega_3 + \frac{1}{2} t^2 \omega_2 + \theta(\omega_{12} - t\omega_{31}) = 0.$$

Условия интегрируемости дают

$$\Omega_{23} + t\Omega_{12} - \frac{1}{2} t^2 \Omega_{31} = 0,$$

$$\Omega_{12} - t\Omega_{31} = 0.$$

Если эти соотношения совместны, они определяют вполне t . Мы можем выбрать репер таким образом, чтобы t равнялось 0. Тогда

$$\omega_{23} = 0,$$

$$d\theta - \omega_1 + \theta\omega_{12} = 0.$$

Первое уравнение дает искомое дополнительное условие. Если оно выполняется, то второе уравнение, которое полностью интегрируемо, дает при помощи квадратуры значение θ , зависящее, конечно, от произвольной постоянной; мы получаем, таким образом, различные изотропные стационарные плоскости.

Форма группы голономии показывает, что можно всегда выбрать репер таким образом, чтобы $\omega_{12} = 0$. Риманово пространство определяется, следовательно, уравнениями

$$\begin{aligned}\omega_1' &= 0, \\ \omega_2' &= [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega_3' &= -[\omega_1 \omega_{31}].\end{aligned}$$

Можно принять

$$\omega_1 = du, \quad \omega_3 = d\omega, \quad \omega_2 = dv + \frac{1}{2} H du, \quad \omega_{31} = \alpha du,$$

причем

$$[dH du] = 2\alpha [d\omega du];$$

функция H зависит, таким образом, только от u и ω ;

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \omega};$$

$$(X) \quad \boxed{ds^2 = d\omega^2 + 2du dv + H(u, \omega) du^2}.$$

Определение геодезических линий найденных римановых пространств приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2 \omega}{du^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \omega} = 0$$

и квадратуре

$$v = -\frac{1}{2} \int \left[H + \left(\frac{d\omega}{du} \right)^2 \right] du + Cu + C'.$$

Эти пространства реализуются изотропными гиперцилиндрами евклидова 4-мерного пространства.

16. *Случай группы голономии (XI).* Эта группа оставляет инвариантной фиксированную неизотропную плоскость.

Если мы примем предположения и обозначения, как в § 14, плоскость

$$ux + vy + wz + h = 0$$

стационарна при следующем условии

$$(11) \quad \frac{du - v\omega_{12} - w\omega_{13}}{u} = \frac{dv - u\omega_{21} - w\omega_{23}}{v} = \\ = \frac{dw - u\omega_{31} - v\omega_{32}}{w} = \frac{dh - u\omega_1 - v\omega_2 - w\omega_3}{h}.$$

Условия интегрируемости выражаются следующим образом:

$$\frac{v\Omega_{12} + w\Omega_{13}}{u} = \frac{u\Omega_{21} + w\Omega_{23}}{v} = \frac{u\Omega_{31} + v\Omega_{32}}{w}$$

или

$$\frac{\Omega_{23}}{u} = \frac{\Omega_{31}}{v} = \frac{\Omega_{12}}{w}.$$

Если они совместны, то определяют величины пропорциональные u , v , w ; можно всегда выбрать репер так, чтобы $u = v = 0$, причем можно положить $w = 1$. Уравнения (11) тогда принимают вид:

$$\omega_{13} = 0, \quad \omega_{23} = 0, \quad dh - \omega_3 = 0.$$

Необходимо, чтобы первые два из этих уравнений удовлетворялись. Если это имеет место, третье вполне интегрируемо.

Отсюда следует, что можно предположить

$$\omega_1' = [\omega_2 \omega_{21}],$$

$$\omega_2' = [\omega_1 \omega_{12}],$$

$$\omega_3 = d\omega,$$

и, следовательно,

$$(XI) \quad \boxed{ds^2 = d\omega^2 + d\sigma^2},$$

где $d\sigma^2$ —форма с двумя переменными (ненулевой кривизны).

Эти пространства хорошо известны.

V.

Классификация трехмерных пространств Вейля по их группе голономии.

17. Мы ограничимся здесь более сжатыми указаниями, причем будем приводить формулы структуры и те две формы ds^2 и ω , которые определяют пространство.

В случае группы голономии (IV) имеем

$$\begin{aligned}\omega_1' &= [\omega_1 (\omega + \omega_{12})], \\ \omega_2' &= [\omega_2 (\omega - \omega_{12})] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega_3' &= -[\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_3 \omega].\end{aligned}$$

Можно принять

$$\omega_1 = du, \quad \omega_3 = dw, \quad \omega_2 = Hd v + \frac{1}{2} K du,$$

и отсюда получаем

$$(IV) \quad \boxed{\begin{aligned}ds^2 &= dw^2 + 2H(u, v, w) dudv + K(u, v, w) du^2, \\ \omega &= L(u, v, w) du - \frac{1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial w} dw\end{aligned}}.$$

Определенное таким образом пространство Вейля зависит от трех произвольных функций 3 аргументов.

В случае группы голономии (V), определенной операторами

$$zq - xr, \quad xp + myq + \frac{m+1}{2} zr, \quad p, \quad q, \quad r \quad (m+1 \neq 0),$$

имеем

$$\begin{aligned}\omega_1' &= \frac{2}{1+m} [\omega_1 \omega], \\ \omega_2' &= \frac{2m}{1+m} [\omega_2 \omega] + [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega_3' &= -[\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_3 \omega].\end{aligned}$$

Следует различать случай $m=0$ и случай $m \neq 0$.

Если $m=0$, можно привести к канонической форме

$$(V_1) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2dudv + H(u, w) du^2, \quad \omega = K(u, v, w) du} ;$$

если $m \neq 0$, получаем следующую каноническую форму

$$(V_2) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2dudv + H(u, v, w)du^2, \quad \omega = \frac{1+m}{4m} \frac{\partial H}{\partial v} du}$$

При группе голономии (VI), определяемой операторами

$$zq - xr + p, \quad xq + 3yq + 2zr, \quad q, \quad r,$$

мы получаем невозможный случай. В самом деле, т. к. группа транзитивна, можно предполагать, что в пространстве E_A оси, относительно которых группа голономии имеет указанную аналитическую форму, имеют началом точку A . Тогда получаем

$$\omega_1 = \omega_{31}, \quad \omega_{23} = 0, \quad \omega_{12} = -\frac{1}{2} \omega,$$

откуда

$$\Omega_{31} = 0, \quad \Omega_{23} = 0, \quad \Omega_{12} = -\frac{1}{2} \Omega.$$

Формулы

$$\omega_1' = \frac{1}{2} [\omega_1 \omega],$$

$$\omega_2' = \frac{3}{2} [\omega_2 \omega] + [\omega_3 \omega_1],$$

$$\omega_3' = [\omega_3 \omega],$$

которые отсюда выводятся, показывают, что

$$[\omega_1 \Omega] = [\omega_2 \Omega] = [\omega_3 \Omega] = 0,$$

откуда вытекает, что форма Ω равна нулю, то есть бесконечно-малое перемещение, соответствующее каждому бесконечно-малому контуру, равно нулю, что невозможно.

В случае группы голономии (VII), определяемой операторами

$$zq - xr, \quad 2yq + zr, \quad q, \quad r,$$

можно предположить, что

$$\omega_1' = 0,$$

$$\omega_2' = 2 [\omega_2 \omega] + [\omega_3 \omega_{31}],$$

$$\omega_3' = - [\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_3 \omega],$$

и

$$(VII) \quad \boxed{\begin{aligned} ds^2 &= d\omega^2 + 2H(u, v, \omega) du dv + K(u, v, \omega) du^2, \\ \omega &= \frac{1}{4H} \left(\frac{\partial K}{\partial v} - 2 \frac{\partial H}{\partial u} \right) du - \frac{1}{2H} \frac{\partial H}{\partial \omega} d\omega \end{aligned}}.$$

Пространство Вейля зависит от двух произвольных функций трех аргументов.

В случае группы голономии (VIII):

$$zq - xr, 2yq + zr, q$$

пространство Вейля входит в предыдущий общий случай. Но необходимо потребовать, чтобы в каждом касательном пространстве E_A можно было найти точку $P(x, y, z)$, у которой ковариантное перемещение было параллельно оси y' ов, то есть чтобы

$$dx + \omega_1 = 0,$$

$$dz + \omega_3 - x\omega_{31} + z\omega = 0.$$

Можно предполагать, что точка P лежит на оси x' ов, т. е. в выборе репера имеется неопределенность. Таким образом, получаем новое условие

$$\omega_1 = du, \quad \omega_{31} = -\frac{\omega_3}{u},$$

откуда

$$\omega_2' = 2[\omega_2 \omega],$$

$$\omega_3' = \left[\frac{du}{u} \omega_3 \right] + [\omega_3 \omega].$$

Получаем следующую каноническую форму

$$(VIII) \quad \boxed{ds^2 = u^2 d\omega^2 + 2H(v, \omega) du dv, \quad \omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial \omega} d\omega}.$$

В случае группы голономии (IX):

$$xp + yq + zr, xp - yq, p, q, r$$

имеем

$$\begin{aligned}\omega_1' &= [\omega_1 (\omega + \omega_{12})], \\ \omega_2' &= [\omega_2 (\omega - \omega_{12})], \\ \omega_3' &= [\omega_3 \omega].\end{aligned}$$

Можно положить

$$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = Hdv, \quad \omega_3 = dw,$$

откуда получаем каноническую форму

$$(IX) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2H(u, v, w) du dv, \quad \omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial w} dw}.$$

В случае группы голономии (XII):

$$2yq + zr, \quad q, \quad r$$

имеем

$$\begin{aligned}\omega_1' &= 0, \\ \omega_2' &= 2 [\omega_2 \omega], \\ \omega_3' &= [\omega_3 \omega].\end{aligned}$$

Приходим к следующей канонической форме

$$(XII) \quad \boxed{ds^2 = dw^2 + 2H(v, w) du dv, \quad \omega = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log H}{\partial w} dw}.$$

18. Установим теперь условия, которым должны в каждом случае удовлетворять произвольные функции для того, чтобы группа голономии была как раз рассматриваемой группой, а не одной из ее подгрупп. В случаях (VIII) и (XII) функция $H(v, w)$ не должна быть произведением функции от v на функцию от w ; в случае (IX) функция $H(u, v, w)$ не должна быть ни произведением функции от u на функцию от v и w , ни произведением функции от v на функцию от u и w .

Можно заметить, что степень общности пространства Вейля каждой разновидности очень просто связана с порядком соответствующей группы голономии. Пространство Вейля зависит

для группы голономии 6-го порядка от 3 функций 3 аргументов,

"	"	"	5-го	"	"	1	"	3	"
"	"	"	4-го	"	"	2	"	3	"
"	"	"	3-го	"	"	1	"	2	"

Следует отметить интересную особенность: пространства Вейля, группа голономии которых имеет 4 параметра, являются более общими, чем пространства с 5-членной группой.

Напомним, что пространства Вейля общего типа зависят от 5 произвольных функций 3 аргументов.

VI.

Группы голономии трехмерных конформных нормальных пространств.

19. Конформными нормальными пространствами¹⁾ трех измерений называются многообразия, фундаментальная группа которых—конформная, и у которых бесконечно-малое преобразование, соответствующее бесконечно-малому циклу с началом A , *второго порядка* в этой точке. Последнее свойство позволяет довольно просто показать, что, если группа голономии не является общей конформной группой (и не единичным преобразованием), она зависит от 6 параметров и оставляет инвариантной фиксированную изотропную прямую.

Напомним прежде всего, что конформная группа изоморфна группе линейного комплекса. В самом деле, сфера определяется 5 однородными координатами, которые связаны между собой в случае сферы нулевого радиуса определенным однородным квадратичным соотношением $F=0$. Конформная группа состоит из линейных преобразований общего вида, оставляющих инвариантной эту форму.

С другой стороны, пусть некоторый линейный комплекс определен в плюкеровых координатах уравнением

$$p_{34} = p_{12}.$$

Группа этого линейного комплекса состоит из линейных преобразований общего вида над 5 координатами p_{12} , p_{13} ,

¹⁾ См. относительно этих пространств цитированный выше мемуар в Ann. Soc. pol. de Math., t. 2, 1923, p. 171—221.

p_{14} , p_{23} , p_{24} , оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$\Phi = p_{12}^2 - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23}.$$

Отсюда—тождественность обеих рассматриваемых групп с аналитической точки зрения.

Соответствие между элементами конформного и проективного пространства выражается следующим образом:

<i>Конформное пространство</i>	<i>Проективное пространство</i>
Точка	Прямая комплекса
Сфера	Прямая, не принадлежащая к комплексу (и ее сопряженная)
Изотропная прямая	Точка (и ее фокальная плоскость) .
Круг	Полу-квадрика.

Известно, что за исключением общей проективной группы и группы линейного комплекса каждая проективная группа пространства оставляет инвариантной или точку, или прямую, или плоскость, или квадрику, или пространственную кривую 3-го порядка.

В последнем случае касательные к кривой 3-го порядка принадлежали бы к комплексу. Произвольная прямая комплекса встречает четыре из этих касательных; преобразования группы, которые оставляли бы эту прямую инвариантной, оставляли бы инвариантными четыре точки касания касательных с кривой 3-го порядка, то есть приводились бы к тождественному преобразованию. Соответствующая конформная группа не имела бы, таким образом, ни одного бесконечно-малого преобразования, оставляющего инвариантной произвольную точку.

Если проективная группа оставляет инвариантной квадрику, могут представиться два случая. Если все прямолинейные образующие одной системы принадлежат комплексу, ей соответствует в конформном пространстве круг и, следовательно, соответствующая конформная группа оставляет инвариантным круг. В противном случае в каждой

системе существовало бы две образующих, принадлежащих к комплексу, и каждая из них была бы инвариантна.

Остальные случаи соответствуют конформным группам, оставляющим инвариантной или сферу, или точку, или изотропную прямую.

Отсюда следует, что *искомая группа голономии оставляет инвариантной или точку, или сферу, или круг, или изотропную прямую.*

Если группа оставляет инвариантной точку (ее можно преобразовать при помощи инверсии в бесконечно удаленную), она является группой подобия или одной из ее подгрупп. Это невозможно, так как не существует преобразования подобия, которое оставляло бы инвариантной точку и было 2-го порядка в этой точке.

Если группа оставляет инвариантной сферу, вывод получается тот же, так как группу можно рассматривать как группу неевклидовых движений.

Если группа оставляет инвариантным круг, она оставляет инвариантными две сферы нулевого радиуса, содержащих этот круг, и мы возвращаемся к первому случаю.

Остается, таким образом, единственный случай, когда группа оставляет инвариантной изотропную прямую.

20. Предположим, что основная квадратичная форма имеет вид

$$F = x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_0x_4,$$

причем декартовы координаты точки пространства выражаются следующим образом

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}.$$

Мы можем предполагать, что изотропная прямая лежит в бесконечности и касается мнимого шарового круга пространства; ее уравнения, например, могут быть выбраны следующим образом:

$$x_0 = x_1 = x_3 = 0.$$

Группа, оставляющая эту прямую инвариантной, опреде-

ляется операторами

$$(12) \quad \begin{cases} X_1 f = x_0 p_1 - x_2 p_4, \\ X_2 f = x_0 p_2 - x_1 p_4, \\ X_3 f = x_0 p_3 - x_3 p_4, \\ X f = -x_0 p_0 + x_4 p_4, \\ X_{12} f = x_1 p_1 - x_2 p_2, \\ X_{13} f = x_1 p_3 - x_3 p_2, \\ X_{10} f = x_1 p_0 - x_4 p_2. \end{cases}$$

В декартовых координатах эти операторы имеют вид

$$(13) \quad \begin{cases} X_1 f = p, \quad X_2 f = q, \quad X_3 f = r, \\ X f = xp + yq + zr, \\ X_{12} f = xp - yq, \\ X_{31} f = zq - xr, \\ X_{10} f = \frac{1}{2} z^2 q - x^2 p - xzr. \end{cases}$$

21. Мы можем предполагать в дальнейшем, что рассматриваемое конформное нормальное пространство есть многообразие, у которого фундаментальной группой является указанная группа с 7 параметрами. Эта фундаментальная группа имеет единственное бесконечно-малое преобразование, оставляющее инвариантной произвольную точку (x_0, y_0, z_0) и имеющее второй порядок в этой точке; это — преобразование

$$X_{10} f + x_0 (X f + X_{12} f) - z_0 X_{31} f - x_0^2 X_1 f + \frac{1}{2} z_0^2 X_2 f - x_0 z_0 X_3 f.$$

Оно принадлежит к инвариантной подгруппе с 6 параметрами, которую оно полностью определяет, если мы будем изменять x_0, y_0, z_0 , и которая necessarily является, следовательно, группой голономии пространства:

$$\left[-x^2 p + \frac{1}{2} z^2 q - xzr, \quad 2xp + zr, \quad zq - xr, \quad p, \quad q, \quad r \right].$$

Так как группа голономии g транзитивна, то можно предполагать, что пентасфера отнесения состоит из точки

A (с координатами $x=y=z=0$), трех ортогональных сфер, проходящих через A (определяемых уравнениями $x=0$, $y=0$, $z=0$) и их второй точки пересечения ($x_0=x_1=x_2=x_3=0$).

Связность пространства определяется 6 формами

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega, \omega_{31}, \omega_{10};$$

так как бесконечно-малое преобразование, соответствующее бесконечно-малому циклу, выходящему из A , второго порядка в этой точке, имеем

$$\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=\Omega=\Omega_{31}=0, \Omega_{10}\neq 0.$$

Поэтому уравнения структуры пространства имеют следующий вид¹⁾

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_1' = 2[\omega_1 \omega], \\ \omega_2' = [\omega_3 \omega_{31}], \\ \omega_3' = -[\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_3 \omega], \\ \omega' = -[\omega_1 \omega_{10}], \\ \omega_{31}' = [\omega_3 \omega_{10}] + [\omega \omega_{31}], \\ \omega_{10}' = 2[\omega \omega_{10}] + \Omega_{10}. \end{cases}$$

Учитывая неопределенность в выборе репера, мы можем положить

$$\omega_1 = du, \quad \omega_3 = dw, \quad \omega_2 = dv + \frac{1}{2} H(u, w) du,$$

$$\omega = 0, \quad \omega_{31} = -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w} du, \quad \omega_{10} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} du,$$

$$\Omega_{10} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3 H}{\partial w^3} [du dw].$$

¹⁾ Обозначения выбраны в соответствии с теми, которые были введены для обозначения бесконечно-малых преобразований группы голономии. Чтобы их согласовать с ковариантными обозначениями абсолютного дифференциального исчисления, следовало бы писать

$$\omega_{02}, \omega_{01}, \omega_{03}, \omega_{40}, \omega_{14}$$

вместо

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega, \omega_{10}.$$

Пространство определяется аналитически уравнением $ds^2 = 0$, причем

$$ds^2 = dw^2 + 2du dv + H(u, w) du^2,$$

где функция H не является полиномом второго порядка относительно w .

Мы видим, что бесконечно-малое преобразование, соответствующее бесконечно-малому циклу с началом A , равно нулю всякий раз, когда цикл расположен в плоском элементе, содержащем стационарное изотропное направление.

22. Полученные выше нормальные конформные пространства $\mathfrak{E}$ обладают интересными геометрическими свойствами. Прежде всего следует отметить, что они имеют ∞^2 сфер; мы будем называть сферой поверхность Σ пространства $\mathfrak{E}$, обладающую следующими свойствами: если развернуть $\mathfrak{E}$ на конформное пространство E_A , касательное в точке A поверхности Σ , то это развертывание голономно при условии, что рассматриваемый путь лежит на Σ ; кроме того, поверхность Σ при этом развертывании дает сферу пространства E_A .

Чтобы доказать это свойство, рассмотрим в пространстве, касательном в некоторой точке A , сферу, проходящую через A и содержащую стационарную изотропную прямую. Координаты $x_0, x_1, \dots, x_4$ этой сферы удовлетворяют уравнениям

$$x_0 = x_1 = x_4 = 0;$$

таким образом, можно положить (чтобы инвариантная форма F была равна 1)

$$x_2 = t, \quad x_3 = 1.$$

Выразим условие того, что при установлении соответствия пространства E_A с $E_{A'}$, касательном в точке A' , бесконечно близкой к точке A , сфера $(0, 0, t, 1, 0)$, отнесенная к A , совпадает со сферой $(0, 0, t + dt, 1, 0)$, отнесенной к A' . На основании формул (12) имеем в общем

случае

$$\begin{aligned} dx_0 - \omega x_0 + \omega_{10} x_1 &= 0, \\ dx_1 + \omega_1 x_0 + \omega x_1 &= 0, \\ dx_2 + \omega_2 x_0 - \omega x_2 - \omega_{13} x_3 - \omega_{10} x_4 &= 0, \\ dx_3 + \omega_3 x_0 + \omega_{13} x_1 &= 0, \\ dx_4 - \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 - \omega_3 x_3 + \omega x_4 &= 0. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае эти формулы приводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \omega_3 + t\omega_1 &= 0, \\ dt + \omega_{31} - t\omega &= 0, \end{aligned}$$

или в канонических переменных

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{du} + t &= 0, \\ \frac{dt}{du} + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \omega} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что каждая поверхность $\omega = f(u)$, определяемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\omega}{du^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \omega},$$

является сферой пространства $\mathfrak{E}$, и эта сфера, развернутая в пространстве E_A , касательном в одной из ее точек (u_0, v_0, ω_0) , дает сферу с координатами.

$$0, 0, -\left(\frac{d\omega}{du}\right)_0, 1, 0,$$

содержащую изотропную прямую.

23. Определение окружностей пространства $\mathfrak{E}$, т. е. кривых, которые при разворачивании на пространство E_A , касательное в одной из их точек, дают круг, также не представляет затруднений. Мы отметим только тот случай, когда окружности расположены на одной из определенных выше сфер. Такой круг полностью определен, если в каждой его точке A мы имеем в пространстве E_A другую сферу, проходящую через A и содержащую его. Можно

выбрать координаты этой сферы следующим образом:

$$\lambda, 1, \mu + \frac{t^2}{2}, 0, 0;$$

имеем

$$d\lambda - \omega\lambda + \omega_{10} = k\lambda,$$

$$\omega_1\lambda + \omega = k,$$

$$d\mu + tdt + \omega_2\lambda - \omega\left(\mu + \frac{t^2}{2}\right) = ht + k\left(\mu + \frac{t^2}{2}\right),$$

$$\omega_3\lambda + \omega_{13} = h,$$

$$-\omega_1\left(\mu + \frac{t^2}{2}\right) - \omega_2 = 0.$$

Эти уравнения приводятся к следующим

$$\frac{d\lambda}{du} - \lambda^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} = 0,$$

$$\frac{d\mu}{du} - 2\lambda\mu = 0,$$

$$\frac{dv}{du} + \frac{1}{2}(H + t^2) + \mu = 0.$$

Их решение приводится к интегрированию уравнения Риккати и квадратурам.

Наконец, линии, играющие в пространстве $\mathfrak{E}$ роль изотропных прямых, определяются также очень просто. Изотропное направление в точке A определяется следующим образом

$$\frac{\omega_1}{1} = \frac{\omega_3}{t} = \frac{\omega_2}{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Выразим условие того, что при установлении конформной связности пространства изотропная прямая, определяемая в пространстве E_A уравнениями

$$x_3 - tx_1 = 0,$$

$$x_2 + \frac{1}{2}t^2x_1 = 0,$$

$$x_4 = 0,$$

остается фиксированной. Имеем

$$\omega_3 - t\omega_1 = 0, \quad \omega_2 + \frac{1}{2}t^2\omega_1 = 0, \quad dt + \omega_{13} - t\omega = 0,$$

или

$$\frac{d^2w}{du^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w} \quad \left(t = \frac{dw}{du} \right),$$

$$\frac{dv}{du} + \frac{1}{2} H(u, w) + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{du} \right)^2 = 0.$$

Искомые линии находятся, таким образом, при помощи интегрирования дифференциального уравнения 2-го порядка, определяющего сферы, и квадратуры.

VII.

Группы голономии плоскостей проективной нормальной связности.

24. В плоскости проективной нормальной связности¹⁾ проективное перемещение, соответствующее бесконечно-малому циклу, выходящему из точки A , второго порядка в этой точке. Следовательно, если группа голономии не является общей проективной группой, она содержит бесконечно-малое преобразование, оставляющее инвариантной произвольную точку, и второго порядка в этой точке.

Каждая подгруппа проективной группы оставляет инвариантной или точку, или прямую, или конику. Проективная группа коники не подходит, так как бесконечно-малое преобразование, оставляющее инвариантной произвольную точку, первого порядка в этой точке. Проективная группа прямой также не подходит—на том же основании. Остается проективная группа с инвариантной точкой; наиболее общая такая группа определяется операторами

$$xp, up, xq, yq, x(xp + yq), y(xp + yq).$$

¹⁾ См. цитированный выше мемуар, Bull. Soc. Math. de France, t. 52, 1924, p. 205—241.

Преобразование группы, оставляющее инвариантной произвольную точку (x_0, y_0) , и второго порядка в этой точке выражается следующим образом:

$x_0^2 u p - x_0 y_0 (x p - y q) - y_0^2 x q - x_0 y (x p + y q) + y_0 x (x p + y q)$. Оно входит в инвариантную подгруппу

$$x p - y q, \quad u p, \quad x q, \quad x(x p + y q), \quad y(x p + y q);$$

изменяя x_0, y_0 , мы получаем эту подгруппу полностью. Следовательно, группа голономии должна быть пятичленной:

$$\boxed{x p - y q, \quad u p, \quad x q, \quad x(x p + y q), \quad y(x p + y q)}.$$

Координатный треугольник, соответствующий точке A , можно всегда выбрать таким образом, чтобы одна из его вершин была расположена в A , третья A_2 — в стационарной точке. Тогда преобразования группы голономии принимают в однородных координатах (x, x_1, x_2) следующий вид

$$Xf = x p - x_1 p_1,$$

$$X_1 f = x p_1,$$

$$X_2 f = x p_2,$$

$$X_{12} f = x_1 p_2,$$

$$X_{10} f = x_1 p;$$

уравнения структуры плоскости $\mathfrak{E}$ выражаются следующим образом

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1' = 2 [\omega \omega_1], \\ \omega_2' = [\omega \omega_2] + [\omega_1 \omega_{12}], \\ \omega' = [\omega_1 \omega_{10}], \\ \omega_{12}' = [\omega_{10} \omega_2] + [\omega_{12} \omega], \\ \omega_{10}' = 2 [\omega_{10} \omega] + \omega_{10}. \end{array} \right.$$

Единственной формой Ω , отличной от нуля, является Ω_{10} , так как единственное бесконечно-малое преобразование второго порядка в A есть $X_{10}f$.

Пользуясь неопределенностью в выборе репера, можно положить

$$\omega_1 = du, \quad \omega_2 = dv, \quad \omega = 0, \quad \omega_{12} = -H du, \quad \omega_{10} = \frac{\partial H}{\partial v} du,$$

и мы получаем

$$\Omega_{10} = -\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} [du dv] \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \neq 0 \right).$$

Геодезические линии, полностью определяющие, как известно, нормальную связность плоскости, даются уравнением

$$\boxed{\frac{d^2 v}{du^2} = H(u, v)}.$$

Кроме того, имеются особенные геодезические линии $u = \text{const.}$, которые, будучи развернуты на проективную плоскость, касательную в одной из их точек, проходят через стационарную точку.

25. Для того, чтобы определить, имеет ли данная плоскость нормальной проективной связности указанную выше группу голономии, достаточно выяснить, существует ли стационарная точка. Будем исходить из общих уравнений структуры

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1' = [\omega_1 \omega_{11}] + [\omega_2 \omega_{21}], \\ \omega_2' = [\omega_1 \omega_{12}] + [\omega_2 \omega_{22}], \\ \omega_{11}' = 2[\omega_{10} \omega_1] + [\omega_{20} \omega_2] + [\omega_{12} \omega_{21}], \\ \omega_{22}' = [\omega_{10} \omega_1] + 2[\omega_{20} \omega_2] + [\omega_{21} \omega_{12}], \\ \omega_{12}' = [\omega_{10} \omega_2] + [\omega_{12} (\omega_{22} - \omega_{11})], \\ \omega_{21}' = [\omega_{20} \omega_1] + [\omega_{21} (\omega_{11} - \omega_{22})], \\ \omega_{10}' = [\omega_{11} \omega_{10}] + [\omega_{12} \omega_{20}] + \Omega_{10}, \\ \omega_{20}' = [\omega_{21} \omega_{10}] + [\omega_{22} \omega_{20}] + \Omega_{20}. \end{array} \right.$$

Точка (x, x_1, x_2) стационарна, если

$$\begin{aligned} \frac{dx + x_1 \omega_{10} + x_2 \omega_{20}}{x} &= \frac{dx_1 + x \omega_1 + x_1 \omega_{11} + x_2 \omega_{21}}{x_1} = \\ &= \frac{dx_2 + x \omega_2 + x_1 \omega_{12} + x_2 \omega_{22}}{x_2}. \end{aligned}$$

Условия интегрируемости дают:

$$x_1 \Omega_{10} + x_2 \Omega_{20} = 0.$$

Это соотношение однозначно определяет отношение $\frac{x_2}{x_1}$.

Предположим, не нарушая общности исследования, что $\omega_{20} = 0$, то есть $x_1 = 0$. Можно положить $x_2 = 1$, и тогда мы имеем

$$\begin{aligned} x\omega_1 + \omega_{21} &= 0, \\ dx + \omega_{20} - x\omega_{22} - x^2\omega_2 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимо, чтобы форма ω_{21} была пропорциональна ω_1 ; если это так, x определяется, и второе уравнение должно быть удовлетворено. Можно выбрать репер таким образом, чтобы $x = 0$; тогда

$$(17) \quad \omega_{21} = \omega_{20} = 0.$$

Можно отметить, что определение геодезических линий допускает упрощение даже без введения канонических переменных. Так как выбор репера связан только тем ограничением, чтобы стационарная точка лежала в 3-ей вершине A_2 , дифференциальные уравнения геодезических имеют вид

$$\omega_2 = \omega_{12} = 0.$$

Исследуем, допускают ли они интегральный инвариант вида $\lambda [\omega_2 \omega_{12}]$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы внешняя производная этой формы была равна нулю¹⁾. Это будет иметь место, если

$$d\lambda + \lambda (\omega_{11} - 2\omega_{22}) = 0.$$

Но форма $\omega_{11} - 2\omega_{22}$ имеет производную, равную нулю, на основании формулы (16) и (17). Таким образом, λ можно определить при помощи квадратуры. Эта квадратура — та самая, которая дает связности плоскости аналитическое выражение, если за фундаментальную группу принять группу голономии²⁾. Этот результат согласуется с тем, что

¹⁾ E. Cartan. Leçons sur les Invariants intégraux. Paris, Hermann, 1922 § 80, p. 76.

²⁾ В самом деле, из общих формул (16) получаются (15), если положить $\omega_{20} = \omega_{21} = 0$, $\omega_{11} = 2\omega_{22} = -2\omega$. Необходимость квадратуры для определения в плоскости связности, соответствующей группе голономии $\mathcal{G}$, сводится к тому, что эта группа инвариантна в группе g' с числом параметров на 1 больше.

было получено выше, так как уравнение

$$\frac{d^2v}{du^2} = H(u, v)$$

допускает множитель 1, то есть интегральный инвариант

$$\iint du dv.$$

VIII.

Группы голономии и топология.

26. В предшествующем изложении мы подразумевали неявно, что группа голономии пространства $\mathfrak{E}$ с фундаментальной группой G *непрерывна*. Это предполагает, что каждый цикл, проведенный в пространстве, может быть непрерывным преобразованием стянут в точку, то есть что пространство односвязно. Если это условие не соблюдается, группа голономии может не быть непрерывной, она может быть *смешанной* (по терминологии С. Ли) или состоять из конечного числа преобразований. Мы часто пользовались теоремой, согласно которой, если бесконечно-малое преобразование, соответствующее произвольному бесконечно-малому циклу, принадлежит инвариантной подгруппе g группы G , группой голономии пространства является g или одна из ее подгрупп. Эта теорема может не иметь места, если пространство не односвязно.

Классический пример дает цилиндр вращения с естественной метрикой, индуцированной на нем окружающим евклидовым пространством; это многообразие не обладает кривизной, то есть евклидово перемещение, соответствующее любому бесконечно-малому циклу, равно нулю. В то же время группа голономии не приводится к тождественному преобразованию: она состоит из различных степеней одного и того же переноса, длина которого равна периметру сечения, перпендикулярного цилиндру. Аналогично можно на поверхности тора ввести евклидову связность без кривизны, причем группой голономии будет служить

группа переносов, оставляющих инвариантной сеть параллелограммов в касательной евклидовой плоскости.

Аналогичный пример, но более интересный, мы получим, если установим на цилиндре вращения метрическую связность без кручения (которая превращает его в плоскость Вейля) с локальной кривизной, повсюду равной нулю; таким образом, если мы будем оставаться в ограниченной области цилиндра, мы получим кусок настоящей евклидовой плоскости. Группа голономии образована в этом случае из различных степеней с целыми показателями (положительными, нулевым или отрицательными) одного и того же подобного преобразования, соответствующего ортогональному сечению цилиндра как циклу. Можно так подобрать связность, чтобы она была всюду регулярна, и чтобы образующее преобразование группы голономии было заранее заданным преобразованием: или переносом (случай, рассмотренный выше), или вращением на заданный угол (созмеримый или несоизмеримый с π), или лучистым расширением с данным коэффициентом расширения, или произведением поворота на заданный угол и лучистого расширения с данным коэффициентом расширения. Обозначим через u и v обычные координаты на цилиндре (криволинейную абсциссу перпендикулярного сечения и ординату), причем координата u определена с точностью до Nl (l — периметр перпендикулярного сечения, N — некоторое целое число); две формы Вейля можно задать следующим образом

$$\boxed{ds^2 = (dv + mdu)^2 + n^2 du^2, \quad \omega = dv + mdu};$$

группа голономии состоит из степеней преобразования подобия:

$$x' + iy' = e^{(m-in)l} (x + iy).$$

Этот пример ясно показывает, что метрическое пространство может быть всюду нулевой кривизны, и все же его нельзя рассматривать в целом как риманово пространство (всюду регулярное).

Наконец, цилиндр можно рассматривать как двумерное всюду регулярное пространство Вейля, у которого кривизна лучистого расширения всюду равна нулю (так что локально его можно рассматривать как риманово пространство), но в то же время группой голономии является смешанная группа, состоящая из бесконечного числа непрерывных семейств подобных преобразований, причем различные коэффициенты подобия суть целые степени одного из них; семейство преобразований группы голономии, соответствующее коэффициенту, равному 1, образует тогда единственную непрерывную группу (группу движений).

Э. КАРТАН

ТЕОРИЯ ГРУПП И ГЕОМЕТРИЯ

E. CARTAN

LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE

(L'Enseignement mathématique, 1927, p. 200—225)

Теория групп и геометрия¹⁾.

Э. К а р т а н.

Было бы крайне смело пытаться в одном докладе изложить общую проблему взаимоотношений между теорией групп и геометрией. Хотя эти взаимоотношения были обнаружены не более полувека тому назад, нет ни одного математика, который не знал бы о глубоком влиянии на развитие геометрии идей Ф. Клейна, систематически развитых им в 1872 г. в знаменитой „Эрлангенской программе“²⁾. Я не буду останавливаться на изложении этих идей, которые являются теперь общим достоянием всех математиков. Я хотел бы попытаться показать кратко, как, несмотря на большие затруднения, возникшие в геометрии в связи с созданием общего принципа относительности, руководящий принцип Клейна, соответственно обобщенный, позволяет получить новый синтез наиболее важных недавно возникших теорий, не говоря уже о тех, которые существуют пока еще только в зародыше и ждут своего полного развития³⁾. Я буду оставаться на строго геометрической почве без экскурсов в философскую проблему пространства, так блестяще разработанную Вейлем⁴⁾. Я постараюсь также

¹⁾ Доклад на заседании Швейцарского Математического Общества в Берне 7 мая 1927 г.

²⁾ Math. Ann., B. 43, 1893, стр. 63—109; Gesamm. Math. Abh., B. 1, 1921. [Ф. Клейн. Сравнительное обозрение геометрических исследований. Известия Каз. Ф.-М. Об-ва. Сер. II, т. 5, 1886].

³⁾ E. Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle (Enseign. math., 1924 - 5, стр. 18; испанский перевод в Revista matem. Hispano-Americana, 1923).

⁴⁾ H. Weyl, Die Einzigartigkeit der Pythagorischen Massbestimmung, Math. Zeitschr., 12, 1922, стр. 114—146; Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin, Springer, 1923.

показать в свете новейших исследований, как геометрия позволяет подойти к рассмотрению некоторых новых проблем теории групп, и отсюда с новой точки зрения осветить наиболее важные из геометрий Клейна.

I.

Как известно, основная идея Клейна может быть связана с наиболее древними понятиями науки. Элементарная геометрия изучает свойства фигур, которые не зависят от их частного положения в пространстве. Прошло немало столетий прежде, чем эта несколько неопределенная формулировка была переведена на точный язык: свойства, изучаемые элементарной геометрией, являются теми, которые остаются инвариантными относительно некоторой совокупности преобразований, образующей группу движений. Аксиома, по которой две фигуры, равные третьей, равны между собой, в несколько отвлеченной форме и выражает свойство движений — образовывать группу. Проективная геометрия, являвшаяся сначала одной из глав элементарной геометрии и превратившаяся при дальнейшем развитии в самостоятельную научную дисциплину, с точки зрения Клейна есть изучение свойств фигур, инвариантных относительно некоторой совокупности преобразований (проективных преобразований), образующих группу.

Вообще всякая группа непрерывных преобразований определяет самостоятельную геометрию. Эта геометрия, если рассматривать переменные, преобразуемые группой, как величины, определяющие точку пространства соответствующего числа измерений, изучает свойства фигур, инвариантные относительно преобразований группы G , причем эти последние играют такую же роль, как движения в евклидовой геометрии или проективные преобразования в геометрии проективной. Группа G называется фундаментальной группой данной геометрии. Таким образом получается аффинная геометрия, конформная или аналлагматическая геометрия, геометрия Лагерра, эрмитова и т. д.

Для удобства выражения присоединяют к слову пространство эпитет, характеризующий фундаментальную группу

изучаемой геометрии; так, говорят: евклидово пространство, проективное пространство и т. д. Все так называемые пространства Клейна являются однородными в том смысле, что их свойства инвариантны относительно преобразований соответствующей фундаментальной группы: эта группа служит, в некотором смысле, мерой однородности пространства. Пространство вполне однородное — это такое пространство, фундаментальная группа которого является бесконечной группой всех непрерывных преобразований: это — топологическое пространство; геометрические свойства фигур здесь сравнительно мало разнообразны; они становятся уже более примечательными, если за фундаментальную группу принять бесконечную группу всех непрерывных дифференцируемых преобразований. В пространстве, не обладающем однородностью, т. е. фундаментальная группа которого приводится к тождественному преобразованию, невозможно в смысле Эрлангенской программы построение общих положений: вся геометрия сводилась бы к частным фактам без связи одних с другими.

II.

В стороне от богатых результатами геометрических исследований, вызванных идеями Клейна, развивается между 1867 и 1914 годами совершенно отличная геометрическая теория, возникшая из знаменитой вступительной лекции Римана: „О гипотезах, лежащих в основании геометрии“¹⁾. Исходные точки зрения обоих великих геометров были совершенно различны. Для Клейна основное геометрическое понятие содержится в аксиоме равенства, интерпретированной в свете понятия группы. Для Римана в эпоху, когда теория непрерывных групп не была еще создана, основным

¹⁾ Вступительная лекция Римана была прочитана им 10 июня 1854 г. в заседании философского факультета Геттингенского университета; она опубликована в общем собрании сочинений Римана (Riemann, Gesammelte Mathematische Werke, Leipzig, 1872, стр. 254—269). [Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основании геометрии (Гаусс, Бельтрами и др. Об основаниях геометрии. Изд. Каз. Физ-Мат. Об-ва. Казань, 1893, стр. 67—82)].

геометрическим понятием является понятие длины; но, следуя общей тенденции современной ему физики и не желая подчинять это понятие априорным положениям, заставляющим в каждой области пространства проявляться законам пространства в целом, он предполагает длину определяемой лишь шаг за шагом при помощи дифференциальной формы, которую для большей простоты можно предположить квадратичной, но произвольной. Обыкновенное пространство является частным случаем более общих пространств, введенных Риманом.

Очевидно, что риманова геометрия, особенно развивавшаяся в Германии и Италии, совершенно не укладывается в рамки Эрлангенской программы, так как риманово многообразие не допускает в общем случае никакого вида однородности. Можно было бы однако попытаться¹⁾ подчинить риманову геометрию руководящей идее Клейна, воспользовавшись принципом, играющим основную роль в Эрлангенской программе, именно принципом присоединения. Действительно, геометрия Римана изучает инварианты бесконечной группы всех точечных преобразований с n переменными, к которой присоединена определенная квадратичная дифференциальная форма. Но такая трактовка этого вопроса была бы отклонением от принципа присоединения Клейна в настоящем его значении. Сущность его заключается в следующем. Можно получить, например, аффинную геометрию из геометрии проективной, присоединяя к проективному пространству привилегированную плоскость (бесконечно удаленную). Это равносильно следующему: во-первых, что фундаментальная группа аффинной геометрии является подгруппой проективной группы; во-вторых, что эта подгруппа образована из всех проективных преобразований, которые оставляют инвариантной бесконечно удаленную плоскость. Ничего подобного нет в римановой геометрии: изучаемые ею свойства нельзя рассматривать как инвариантные при преобразованиях, сохраняющих присоединенную квадратичную дифференциальную форму,

¹⁾ J. A. Schouten, Erlanger Programm und Übertragungslehre (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 50, 1926, стр. 1—28).

так как в общем случае таких преобразований не существует. Применяя полностью такое неправомерное расширение принципа присоединения, можно было бы каждую математическую проблему уложить в рамки Эрлангенской программы; для этого достаточно было бы присоединить к группе всех возможных преобразований данные изучаемой проблемы.

Правда, можно было бы приблизиться к идеям Клейна с помощью следующего рассуждения. Пусть G — бесконечная группа с $\frac{n(n+3)}{2}$ переменными x_i, g_{ij} , полученная присоединением к уравнениям произвольного преобразования над переменными $x_1, x_2, \dots, x_n$ тех уравнений, которые указывают, как это преобразование трансформирует компоненты g_{ij} фундаментального тензора. Группа G есть фундаментальная группа геометрии Клейна, изучающей свойства пространства $E \frac{n(n+3)}{2}$ измерений. Всякое риманово многообразие может быть рассматриваемо как n -мерное многообразие X_n , вложенное в это пространство и определенное уравнениями, которые выражают g_{ij} в функции от x -ов. Но риманова геометрия прежде всего не является, по сути дела, изучением свойств многообразия X_n в его взаимоотношениях с объемлющим пространством, и, если бы даже это имело место, она не более являлась бы геометрией в смысле Клейна, чем изучение отдельной поверхности, вложенной в евклидово пространство, например, поверхности волны.

III.

Общий принцип относительности перенес в область физики и философии тот антагонизм, который существовал между двумя руководящими принципами геометрии—Римана и Клейна. Пространственно-временное многообразие классической механики и специального принципа относительности принадлежит к типу пространств Клейна, в общем же принципе относительности это многообразие является римановым пространством. Тот факт, что почти все явле-

ния, изучавшиеся наукой в течение многих столетий, могли быть объяснены одинаково хорошо как с той, так и с другой точки зрения, являлся чрезвычайно показательным и настоятельно требовал синтеза, объединяющего оба этих антагонистических принципа.

Открытый в 1917 году Леви-Чивита¹⁾ в пространстве Римана параллельный перенос направил внимание ученых по новому руслу. Обобщая понятие параллелизма Леви-Чивита и развивая до конца руководящую идею Римана путем введения относительности в понятие длины, Вейль²⁾ пришел к построению метрических пространств более общих, чем пространства Римана. Геометры были увлечены плодотворностью понятия параллельного переноса и предполагали, что в нем найден конструктивный принцип для общей дифференциальной геометрии. Несостоятельность этой точки зрения проявилась с очевидностью в невозможности обосновать на таком принципе проективную и конформную геометрию: в проективной геометрии не существует понятия параллелизма, в конформной геометрии отсутствие самого понятия вектора не позволяет ставить проблему параллельного переноса.

IV.

Но если параллельный перенос сам по себе не дал достаточно общего принципа для объединения различных известных геометрических теорий, он указал, по крайней мере, средство для достижения этого.

Возьмем в пространстве Римана небольшую область, окружающую данную точку A ; задание элемента длины ds^2 пространства превращает эту область как бы в небольшой участок пространства Евклида; можно вообразить, например, прямоугольный репер с началом в точке A и отнести к нему все точки M , бесконечно близкие к A , определяя их положение с помощью прямоугольных декартовых координат. Тогда формулы, выражающие расстояние точки M

¹⁾ T. Levi-Civita. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque. (Rend. Circ. Mat. Palermo, 42, 1917, стр. 173—203).

²⁾ H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 3-te Auflage (Berlin, Springer, 1922).

от начала, угол между двумя векторами, соединяющими точку A с двумя бесконечно близкими к ней точками M и M' , формулы, выражающие преобразования прямоугольных координат, будут совершенно такие же, как и в обыкновенном пространстве. Затруднение появляется только тогда, когда приходится рассматривать два соседних участка пространства, один из которых окружает точку A , другой соседнюю точку A' ; они образуют два куска евклидова пространства, которые остаются как бы изолированными друг от друга, пока мы не сумеем ориентировать их один по отношению к другому. Более точно, если мы отнесем точкам A и A' два прямоугольных репера, мы сумеем определить, как и в геометрии Евклида, начало A' второго репера относительно первого, но мы не сумеем ориентировать оси второго репера по отношению к осям первого. Параллельный перенос Леви-Чивита дает нам средство для определения этой ориентации, так как благодаря ему мы можем определить, когда два вектора с началами A и A' должны быть рассматриваемы как параллельные. Параллелизм Леви-Чивита дает нам не только соотношение между векторами, расположенными в двух бесконечно близких точках пространства, но, что гораздо существеннее, он позволяет нам объединить оба маленьких смежных куска пространства Римана в одном и том же евклидовом пространстве.

С этой точки зрения пространство Римана рассматривается как совокупность небольших кусков евклидовых пространств, между которыми установлено шаг за шагом соответствие. Существенно отметить, что установление соответствия производится обязательно вдоль некоторого пути. Если даны две точки A и B пространства, связанные между собой дугой непрерывной кривой (C) , то можно рассматривать линию (C) и область, непосредственно примыкающую к ней, как часть одного и того же пространства Евклида; или, если воспользоваться образным выражением, можно развернуть эту область риманова пространства на воображаемое евклидово пространство, касательное в точке A к пространству Римана. То обстоятель-

ство, что рассматриваемое пространство не является евклидовым, проявляется в том, что развертывание вдоль дуги другой кривой (C'), соединяющей точки A и B , не будет давать для точки B и ее окрестности того же положения в евклидовом пространстве, касательном в точке A , как при первом развертывании.

Возможность объединения в одном и том же евклидовом пространстве двух смежных кусков пространства Римана можно охарактеризовать, говоря, что данное пространство обладает евклидовой связностью. Тот факт, что установление соответствия между двумя несмежными окрестностями точек A и B осуществляется постепенно и зависит от пути перехода от A к B , отмечают тем, что пространство Римана называют не голономным евклидовым пространством.

Возвратимся теперь к точке зрения Клейна. Обычное евклидово пространство есть пространство Клейна, фундаментальной группой G которого является группа движений. Группа эта характеризует основную сущность обыкновенной геометрии. Основные уравнения, определяющие движения подвижного триэдра, зависящего от нескольких параметров, суть не что иное, как уравнения структуры группы G в том смысле, который придан мною этому понятию в моей теории структуры непрерывных групп, так что теория кривых, поверхностей, конгруэнций и комплексов прямых является в основном простым аналитическим следствием этих уравнений. В пространстве Римана, в каждой точке которого присоединен прямоугольный репер, переход от одного репера к реперу бесконечно близкому выполняется также с помощью преобразования группы G , которое можно разложить на трансляцию и вращение; трансляция задается непосредственно элементом длины ds^2 пространства, вращение определяется с помощью параллельного переноса Леви-Чивита. Можно, следовательно, сказать, что пространство Римана имеет ту же самую фундаментальную группу G , что и евклидово пространство, но преобразование группы G , дающее переход от одного репера к другому, определяется только шаг за шагом и

имеет смысл лишь тогда, когда задан путь, соединяющий начала обоих реперов. Пространство Римана есть неголономное пространство с фундаментальной группой G .

V.

Теперь уже не трудно вообразить неголономные пространства с какой угодно фундаментальной группой¹⁾. Неголономное проективное пространство, например, получается, если каждой точке числового многообразия отнест *in abstracto* проективное пространство (касательное пространство) и задать закон, позволяющий объединить в одном и том же проективном пространстве два проективных пространства, относящихся к бесконечно близким точкам. Если, например, в каждом из этих пространств построить проективный репер (координатный тетраэдр), то закон соответствия будет выражаться аналитически с помощью бесконечно-малого преобразования проективной группы, которая, таким образом, играет роль фундаментальной группы. Очевидно, что полученное таким образом понятие пространства проективной связности выходит за пределы понятия параллельного переноса; однако можно было бы использовать, как это сделал Скоутен, свойство проективной группы быть заданной в линейном виде, чтобы приложить общую аналитическую теорию параллельных переносов к изложению теории пространств проективной связности.

Пространства Вейля входят в указанную общую теорию; достаточно лишь за фундаментальную группу взять вместо группы движений группу движений и подобий обыкновенного пространства.

Для всех неголономных пространств с фундаментальной группой является общим следующее свойство. Возьмем дугу кривой AB ; область пространства, непосредственно окружающая эту дугу кривой, может быть рассматриваема как часть одного и того же пространства Клейна. Следовательно, теория кривых является совершенно одинаковой

¹⁾ E. Cartan. Les espaces à connexion conforme (Ann. Soc. polon. de math., 1923, стр. 171 — 221); Sur les variétés à connexion projective (Bull. Soc. Math., 52, 1924, стр. 205 — 241).

как в неголономных, так и голономных пространствах с одной и той же фундаментальной группой. Замечательные классы кривых голономного пространства имеют свои аналоги в неголономном пространстве. Так, например, прямые существующие в евклидовой, аффинной и проективной геометриях, имеют свои аналоги в пространствах евклидовой, аффинной и проективной связности: это геодезические линии этих пространств, которые можно определить как линии, развертывающиеся в прямые. В пространстве Римана 3 измерений понятия кривизны и кручения линии обобщаются непосредственно; в пространстве Вейля понятия, которые заменяют собой понятие кривизны и кручения, суть два основных инварианта евклидовой кривой по отношению к группе подобий. С другой стороны, можно было бы вообразить пространства с фундаментальной группой одного измерения; эти пространства необходимо должны быть голономными.

Неголономность пространства проявляется только в том случае, когда его развертывают вдоль дуг двух различных кривых, соединяющих пару одних и тех же точек, или, что приводит к тому же, когда пространство развертывают по замкнутому контуру, или циклу. Такому циклу, выходящему, например, из точки A и в нее возвращающемуся, соответствует в голономном пространстве, касательном в A , некоторое преобразование фундаментальной группы, в котором и проявляется неголономность пространства вдоль цикла. Если этот цикл бесконечно-мал, то связанное с ним преобразование тоже бесконечно-мало и определяет риманову кривизну пространства вдоль цикла. Важным частным случаем является тот, при котором это бесконечно-малое преобразование оставляет фиксированной точку A ; я предложил в этом случае говорить, что неголономное пространство является пространством без кручения. Это имеет место, например, для пространств Римана, евклидова связность которых определена с помощью параллелизма Леви-Чивита; это имеет также место для пространств Вейля. В случае пространств аффинной связности, которые содержат в себе как частный случай указанные выше

пространства, преобразование, соответствующее бесконечно-малому циклу, может быть разложено на трансляцию (приложенную к точке A) и аффинное вращение. Трансляция определяет кручение пространства, вращение — его кривизну. Пространство аффинной связности без кривизны является пространством, в котором параллелизм двух векторов имеет абсолютное значение, независимое от пути, соединяющего их точки приложения. Мы увидим в дальнейшем, что пространства без кривизны имеют важные приложения.

VI.

До сих пор, говоря о неголономных пространствах, мы неявно имели в виду точечные пространства. Но уже издавна в проективной геометрии, например, рассматривали в пространстве отличные от точки основные элементы, например, плоскость или прямую. Природа основного элемента играет, впрочем, второстепенную роль и не затрагивает существа геометрии: хотя фундаментальная группа с изменением основного элемента пространства меняет аналитическую форму, но структура группы остается той же самой, а именно этой структурой и обуславливаются внутренние свойства соответствующей геометрии.

В случае неголономных пространств выбор основного элемента играет существенную роль. Пространство Римана есть точечное неголономное евклидово пространство. Можно вообразить неголономное тангенциальное евклидово пространство (т. е. образованное плоскостями); его геометрия значительно отличается от римановой геометрии. Пространство Кели-Клейна постоянной кривизны, в котором за основной элемент принята точка, есть неголономное евклидово пространство; но если за основной элемент принять плоскость, то получается уже иная картина, так как фигура, образованная плоскостями, бесконечно близкими к данной плоскости, не обладает всеми теми же бесконечно-малыми свойствами, которые имеются у аналогичной фигуры в евклидовом пространстве. В пространстве Кели положительной кривизны две бесконечно близкие плоскости имеют инвариантом дифференциальную определенную

квадратичную тернарную форму (выражающую, например, квадрат расстояния их полюсов по отношению к абсолюту); в евклидовом пространстве инвариантом двух плоскостей является бесконечно-малый угол между их нормальными; в последнем случае входят только два независимых дифференциала вместо трех; можно сказать, что евклидово пространство, образованное из плоскостей как элементов, в известном смысле менее твердо, чем пространства постоянной кривизны.

Таким образом, мы имеем чрезвычайно большое разнообразие возможных неголономных геометрий, но до настоящего времени было изучено только небольшое число из них.

Изложенное выше мы иллюстрируем следующим частным примером. Возьмем проективную группу плоскости. Мы получим первый класс неголономных пространств 2 измерений, приняв за основной элемент точку; в этих пространствах существуют геодезические линии, которые при отнесении пространства к некоторой системе точечных координат x, y являются интегральными кривыми дифференциального уравнения следующего вида:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A(x,y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + B(x,y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + C(x,y) \frac{dy}{dx} + D(x,y) = 0.$$

Обратно, если дано дифференциальное уравнение этого вида, можно найти бесконечное множество проективных связностей, имеющих интегральные кривые этого уравнения геодезическими линиями соответствующего пространства; среди всех этих связностей имеется, между прочим, одна привилегированная, для которой проективное перемещение, соответствующее бесконечно-малому циклу, имеющему начало в точке A , оставляет инвариантными как точку A , так и все прямые, проходящие через A .

Возьмем теперь при той же фундаментальной группе за основной элемент не точку, а контактный элемент Ли (совокупность точки и проходящей через эту точку прямой). Мы получим тогда пространство элементов (3 измерений) с проективной связностью. В этом случае мы можем до-

стигнуть того, чтобы геодезические линии (соответствующие прямым проективной плоскости, рассматриваемым как геометрические места контактных элементов) были интегральными кривыми совершенно произвольного дифференциального уравнения 2-го порядка, так что мы сможем геометризовать теорию инвариантов дифференциального уравнения 2-го порядка относительно группы наиболее общих точечных преобразований.

В предыдущем примере пространством являлось геометрическое место контактных элементов; фундаментальной группой была группа контактных преобразований, получаемая с помощью продолжения в смысле Ли точечной проективной группы. Очевидно, что можно исходить из любой неприводимой группы контактных преобразований, например, из группы контактных преобразований, которые переводят ориентированные сферы в ориентированные; пользуясь этой группой, можно построить неголономные пространства, принимая за основной элемент, например, контактный элемент или ориентированную сферу и т. д.

VII.

До сих пор неголономные пространства рассматривались нами *in abstracto*; связность, которая служит для их определения, имела внутренне-геометрический смысл. Вейль первый ввел параллельный перенос с помощью внутренних свойств пространства. Леви-Чивита, наоборот, рассматривал вопрос с совершенно иной точки зрения, которая, уступая точке зрения Вейля с философской стороны, имеет большое значение для геометрии; она находится в связи с общей теорией индуцированных связностей, о которых я скажу только несколько слов.

Прежде чем излагать метод Леви-Чивита, мы обрисуем его на одном очень элементарном примере. Возьмем кривую в обычной (евклидовой) плоскости; то, что кривая рассматривается нами в евклидовой плоскости, позволяет определить на кривой криволинейную абсциссу. Забудем теперь, что кривая расположена на плоскости, и будем рассматривать только кривую саму по себе; ничто не от-

личает ее от евклидовой прямой: формула Шаля, связывающая абсциссы трех точек на прямой, связывает равным образом криволинейные абсциссы трех точек на кривой. Изучение кривой в евклидовой плоскости дает нам, следовательно, средство рассматривать эту кривую как евклидово пространство одного измерения. Мы можем, между прочим, изобразить этот процесс кинематически, катя или развертывая кривую на одну из ее касательных; можно также определить каждую бесконечно-малую стадию этого развертывания, заставляя соответствовать каждой точке кривой M , бесконечно близко расположенной от A , точку M' , лежащую на касательной в точке A и являющуюся ортогональной проекцией точки M .

Если мы возьмем теперь поверхность в обыкновенном пространстве, мы можем также попытаться развернуть эту поверхность на плоскость, касательную к ней в одной из ее точек. Если поверхность является развертывающейся, такое развертывание будет возможно; если нет, его всегда можно выполнить вдоль дуги кривой AB , что приводит к развертыванию той развертывающейся поверхности, которая описана около исходной поверхности вдоль кривой AB ; но развертывание вдоль другой дуги кривой, соединяющей A с B , не приведет к тому же самому результату: этот процесс не является голономным. Мы можем, следовательно, рассматривать поверхность, вмещенную в евклидово пространство, как неголономную евклидову плоскость; объединение в одной и той же евклидовой плоскости точек, бесконечно близких к A , и векторов, выходящих из этих точек, может быть очень просто получено ортогональным проектированием поверхности на касательную в в точке A плоскость. И в этом случае то, что поверхность находится в евклидовом пространстве, позволяет наделить поверхность индуцированной евклидовой связностью; если мы затем забудем об объемлющем пространстве и будем рассматривать поверхность только саму по себе, но с евклидовой связностью, которую мы в ней построили, мы получим двумерное пространство Римана с параллельным переносом Леви-Чивита, у которого квадрат элемента

длины ds^2 тот же, что и у поверхности. Два касательные к поверхности вектора, приложенные в точках A и M , будут параллельны, если проекция второго вектора на плоскость, касательную в точке A , параллельна первому. Отметим, что евклидово пространство (в данном случае плоскость), касательное в точке, имеет теперь конкретный смысл, в то время как при изложенной выше точке зрения оно было чисто фиктивным.

Понятие индуцированной связности может быть приложено к различным вопросам и, повидимому, должно играть очень важную роль в классических геометрических теориях. Я приведу несколько простых примеров.

В плоской конформной геометрии возьмем некоторую кривую (C) ; можно развернуть эту кривую на круг, соприкасающийся с кривой в одной из ее точек, другими словами, можно рассматривать кривую как одномерное конформное пространство (круг). Развертывание выполняется не в обычном метрическом смысле с сохранением длин дуг, так как длина дуги не имеет смысла в конформной геометрии. Процесс этот может быть представлен в следующей не строгой, но зато простой форме. Возьмем на кривой три бесконечно близкие точки A, A_1, A_2 ; их можно рассматривать принадлежащими кругу, соприкасающемуся с кривой в точке A ; пусть теперь A_3 — некоторая четвертая точка, бесконечно близкая к трем первым; прямая, соединяющая центр соприкасающегося круга с точкой A_3 , пересечет этот круг в точке A_3' , которую мы отнесем точке A_3 при развертывании кривой; можно, между прочим, заменить прямую кругом, проходящим через две фиксированные заданные точки, взаимно обратные по отношению к соприкасающемуся кругу. С помощью конформного преобразования приведем три точки A_1, A_2, A_3 в совмещение с точками A_1, A_2, A_3' ; кривая займет новое положение и можно начать для пятой точки кривой только что выполненное построение, которое заставит эту точку соответствовать пятой точке A_4' круга и т. д. Для окружности можно ввести проективный параметр, определенный с точностью до проективного преобразования и обладающий

тем свойством, что координаты точки кривой являются рациональными функциями от него. Таким образом, для любой плоской кривой мы можем определить проективный параметр, при помощи которого можно построить понятие об ангармоническом отношении четырех точек кривой. Аналитически этот параметр очень просто получается как отношение двух частных решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{4\rho^2} = 0,$$

где s обозначает дугу кривой, ρ — радиус кривизны.

Аналогично в плоской проективной геометрии можно проективно развернуть любую кривую на соприкасающуюся конику и определить совершенно таким же образом ангармоническое отношение четырех точек кривой. Но здесь это развертывание затрагивает вместе с рассматриваемой кривой и плоскость, которая оказывается как бы связанной с этой кривой и наделяется при этом метрикой Кели постоянной кривизны. В самом деле, проведем через некоторую точку P плоскости касательную PA к кривой и построим конику, соприкасающуюся с кривой в точке A ; ее можно рассматривать как абсолют геометрии Кели; расстояние Кели от точки P до бесконечно близкой P' равно логарифму ангармонического отношения точек P , P' и двух точек, в которых прямая PP' пересекает конику. Дифференциальная квадратичная форма плоскости ds^2 является неопределенной и существует только в тех областях плоскости, откуда можно провести касательную к кривой. Направление PA — изотропное; второе изотропное направление в точке P есть направление второй касательной, проведенной из P к конике, соприкасающейся в точке A . Геодезические линии этой метрики не являются, вообще говоря, уже прямыми. Присоединение произвольной кривой позволило нам превратить плоскость в двумерное пространство Кели; это пространство голономно, так как связность Кели определяется развертыванием данной кривой на соприкасающуюся к ней конику, а это развертывание

является обязательно голономным, так как кривая имеет только одно измерение.

Можно аналогичным образом в трехмерном проективном пространстве развернуть поверхность на квадрiku Ли; развертывание не является уже голономным, если только поверхность не будет линейчатой; в случае линейчатой поверхности квадрика Ли будет одной и той же вдоль образующей; мы приходим, таким образом, к многообразию (прямых) одного измерения, а это обуславливает голономность процесса.

VIII.

Вернемся теперь к неголономным пространствам с фундаментальной группой G . Как мы уже видели, всякому циклу, выходящему из точки A и в нее возвращающемуся, соответствует некоторое преобразование группы G , оперирующее в голономном пространстве, касательном в точке A . Совокупности циклов, выходящих из A , соответствует совокупность преобразований группы G , которые, как нетрудно показать, образуют группу g : это есть группа голономии пространства; она является по существу одной и той же во всех точках пространства. Группа g даст нам как бы меру неголономности пространства; если она приводится к тождественному преобразованию, мы имеем пространство Клейна. Мы получаем, таким образом, метод для классификации пространств с данной фундаментальной группой подобно тому, как группа Галуа алгебраического уравнения позволяет классифицировать в общих чертах уравнения по степени иррациональности корней.

Бесконечно-малые преобразования группы G , соответствующие бесконечно-малым циклам, принадлежат к группе голономии, но они не дают всегда всех основных бесконечно-малых преобразований, определяющих первую группу. Однако, если все они обращаются в нуль, т. е. если риманова кривизна пространства повсюду равна нулю, группа голономии приводится к тождественному преобразованию, и пространство является голономным. Это можно доказать аналитически или при помощи геометрических рассуждений

Но здесь приходится учитывать топологический характер пространства: наше заключение будет верным только в том случае, если пространство односвязно, т. е. если все циклы при помощи непрерывной деформации могут быть стянуты в точку. В противном случае пространство может иметь повсюду риманову кривизну, равную нулю, и в то же время не быть в действительности голономным. Классический пример дает цилиндр вращения, вмещенный в обычное пространство; его разворачивание вдоль цикла на одну из его касательных плоскостей будет голономным, если цикл приводим к нулю (может быть стянут в точку). Но разворачивание вдоль прямого сечения дает в результате конечную трансляцию; группа голономии состоит из степеней этой трансляции. Такие же соображения приложимы к тем геометрическим образам, которые принято называть формами Клиффорда евклидова пространства. Можно также ввести *in abstracto* на цилиндре такую связность Вейля (не индуцированную), что ее риманова кривизна будет повсюду равна нулю, и все же это двумерное пространство не будет в целом ни евклидовым ни даже римановым; только совершив кругосветное путешествие, обитатель этого пространства мог бы заметить, что его вселенная не является ни евклидовой, ни римановой.

Принцип классификации пространств по их группе голономии может быть поставлен в связь с принципом присоединения, или подчинения, Клейна. Одна геометрия Клейна подчинена другой, если фундаментальная группа первой является подгруппой фундаментальной группы второй геометрии. Например, аффинная геометрия подчинена проективной геометрии, или, если угодно, является особой главой проективной геометрии, в которой изучаются свойства фигур, содержащих бесконечно удаленную плоскость; можно, между прочим, получить бесчисленное множество аффинных геометрий в одном и том же проективном пространстве, выбирая произвольную плоскость в качестве бесконечно удаленной. Если мы возьмем теперь неголономное проективное пространство, то в нем картина будет иная; для того, чтобы в этом пространстве можно было постро-

ить аффинную геометрию, необходимо, чтобы было возможно выбрать в нем проективные реперы, связанные между собой по аффинному закону; для этого необходимо и достаточно, чтобы группа голономии пространства была аффинной группой, что не всегда имеет место. Вообще всякое неголономное пространство с фундаментальной группой G , имеющее в качестве группы голономии подгруппу g группы G , может быть рассматриваемо как неголономное пространство, допускающее в качестве фундаментальной группы каждую подгруппу группы G , содержащую в себе g . Так, пространство Вейля может быть рассматриваемо как риманово, если его группа голономии не содержит подобных преобразований, а только движения.

IX.

Как мы видим, значение теории групп не уменьшается при современном развитии дифференциальной геометрии; наоборот, повидимому, только одна эта теория в состоянии объединить различные разветвления последней. Теперь я хотел бы по возможности кратко указать на те услуги, которые могут оказать самой теории групп новые понятия дифференциальной геометрии.

Рассмотрим группу непрерывных преобразований G с r параметрами $a_1, a_2, \dots, a_r$ и отнесем каждому преобразованию группы точку $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ пространства r измерений, которое мы будем называть групповым пространством. В появившейся недавно работе ¹⁾ Скоутеном и мною было показано, как можно ввести в это пространство три замечательные аффинные связности, внутренне связанные со свойствами группы; я развил еще дальше это исследование в одном мемуаре, который только что появился ²⁾. Каждая из этих связностей превращает групповое пространство в неголономное аффинное пространство. Две из них являются

¹⁾ E. Cartan and J. A. Schouten. On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups (Proc. Akad. Amsterdam, 29, 1926, стр. 803—815).

²⁾ E. Cartan, La géométrie des groupes de transformations (Journal Math., 6, 1927, стр. 1—119).

связностями без кривизны, то есть, как было указано выше, параллелизм векторов в этом случае имеет абсолютное значение. Определение их очень просто. Напомним, что произведение двух преобразований зависит в общем случае от порядка, в котором они выполнены, так что операция, обратная умножению, возможна в двух видах: можно принять за отношение двух преобразований S' и S или преобразование $S'S^{-1}$, или преобразование $S^{-1}S'$. Вектор группового пространства определяется с помощью двух преобразований S и S' , которые соответствуют его началу и концу. Введем понятие о двух видах эквиполлентности векторов; два вектора (S, S') и (T, T') называются эквиполлентными, если имеет место или равенство

$$S'S^{-1} = T'T^{-1} \quad (\text{эквиполлентность первого рода})$$

или

$$S^{-1}S' = T^{-1}T' \quad (\text{эквиполлентность второго рода}).$$

Каждая из этих эквиполлентностей определяет одну из двух связностей без кривизны группового пространства; каждая из этих связностей имеет кручение, причем оба эти кручения равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Что касается третьей связности, то ее кручение равно нулю, но она имеет ненулевую кривизну, и эквиполлентность двух векторов может быть определена здесь только шаг за шагом.

Геодезические линии группового пространства одни и те же для всех трех связностей; они связаны с однопараметрическими подгруппами данной группы; подгруппам, зависящим от нескольких параметров, соответствуют вполне геодезические многообразия, т. е. такие, что всякая геодезическая линия, имеющая в этом многообразии две точки, принадлежит ему целиком. Существуют и другие вполне геодезические многообразия, отличные от указанных, причем в теории групп они играют роль, о которой раньше не подозревали.

Многие из основных понятий и теорем теории групп принимают при рассматриваемой интерпретации интересный геометрический характер. Так, структурные постоянные

группы определяют кручение одного из групповых пространств нулевой кривизны; две группы, имеющие одно и то же пространство нулевой кривизны, изоморфны. Наоборот, может случиться, что две группы имеют одно и то же пространство без кручения, не будучи изоморфными; совпадение пространств без кручения двух групп вводит, следовательно, изоморфизм более общего вида, чем обычный; его можно назвать афинным изоморфизмом. Можно также ввести понятие о проективном изоморфизме, создавая в групповом пространстве проективную связность, соответствующую группе инвариантным образом.

Среди непрерывных групп имеется особенно важный класс — простых и полупростых групп. Пространства без кручения этих групп суть римановы с элементом длины ds^2 , не являющимся обязательно определенной квадратичной формой. Они составляют часть более обширного класса римановых пространств, характеризующихся тем свойством, что в них параллельный перенос сохраняет риманову кривизну. Интересно отметить, что это свойство эквивалентно следующему, которое с первого взгляда кажется менее ограничительным: симметрия по отношению к любой точке пространства есть изометрическое преобразование т. е. оставляющее инвариантным элемент длины ds^2 пространства.

Проблема определения всех пространств с положительной определенной формой ds^2 , риманова кривизна которых сохраняется при параллельном переносе, решена полностью¹⁾; исследование наиболее общих типов этих пространств приводится к изучению многообразий меньшего числа измерений, которые называются неприводимыми. Эти неприводимые пространства Римана открывают наиболее неожиданные перспективы на некоторые важные про-

¹⁾ Эта проблема была предметом исследования недавно появившегося мемуара (Bull. Soc. Math., 54, 1926 стр. 214—264; 55, 1927, стр. 114—134). См. также E. Cartan, Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure (Rend. Acc. Lincei, 6-me série, 31, 1926, стр. 544—547).

блемы теории простых групп и классической геометрии. Я буду ради краткости называть их пространствами $E^{(1)}$.

Х.

Для лучшего уяснения той роли, которую играют пространства E , следует сделать несколько предварительных замечаний по поводу простых групп. Каждой простой структуре порядка r соответствует прежде всего группа с комплексными параметрами $a_1, a_2, \dots, a_r$, (в действительности не одна, а бесчисленное множество групп, но все они изоморфны между собой). Но этой структуре могут соответствовать также группы, которые получаются, если взять вместо $a_1, a_2, \dots, a_r$, соответствующим образом выбранные аналитические функции вещественных параметров $a_1, a_2, \dots, a_r$, будем говорить кратко, что группа является комплексной в первом случае и вещественной во втором. Например, группы всех комплексных или вещественных проективных преобразований n переменных являются соответственно комплексными или вещественными, причем они соответствуют одной и той же структуре.

Данной простой структуре соответствует несколько различных вещественных видов групп, не изоморфных между собой; в частности, комплексной проективной группе n переменных соответствует вещественная проективная группа n переменных, а также линейные унимодулярные группы формы Эрмита с $n+1$ переменными (определенной или неопределенной). Хотя переменные являются комплексными, эти последние группы называются вещественными, потому что внимание здесь обращается на $(n+1)^2-1$ вещественных величин, от которых зависят параметры их подстановок.

В 1914 году²⁾ я определил все различные вещественные виды групп, соответствующие одной и той же простой

¹⁾ В позднейших работах Картан называет пространства, в которых параллельный перенос сохраняет кривизну, симметрическими. (Прим. перев.).

²⁾ E. Cartan, Les groupes réels simples, finis et continus (Ann. Ec. Norm., 3-me série, 31, 1914, стр. 263—355).

структуре. Среди всех этих групп имеется одна, исключительную важность которой обнаружил Вейль²⁾, — это так называемая унитарная группа; область унитарной вещественной группы замкнута, в то время как области других вещественных групп являются открытыми. Необходимо, таким образом, для данной простой структуры различать комплексную группу, унитарную вещественную группу и ряд не унитарных вещественных групп.

Вернемся теперь к пространствам E . Первый замечательный результат заключается в том, что их определение приводится к определению различных вещественных групп, соответствующих различным возможным простым структурам. А именно, комплексной группе и каждой из вещественных не унитарных групп данной простой структуры соответствуют два класса пространств E ; пространства первого класса имеют риманову кривизну повсюду положительную или равную нулю; пространства второго класса имеют риманову кривизну повсюду отрицательную или нулевую. В каждом классе имеется, собственно говоря, только одно пространство, так как из одного можно получить остальные простым изменением единицы длины.

Я буду говорить преимущественно о пространствах E с отрицательной кривизной. Все эти пространства имеют всюду регулярную метрику; они односвязны и обладают тем свойством, что через две произвольные точки проходит одна и только одна геодезическая линия. Каждое из них допускает группу движений, являющуюся или просто комплексной или вещественной не унитарной группой, которой это пространство соответствует; в первом случае его группа движений определяется $2r$ вещественными параметрами, во втором случае имеется только r вещественных параметров. Группа же движений пространств E с положительной кривизной, наоборот, всегда является унитарной

²⁾ Н. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen (Math. Zeitschr., 23, 1925, стр. 271—309; 24, 1925, стр. 328—395 [Г. Вейль, Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований. Успехи математических наук. Вып. IV, 1938, стр. 201—246].

вещественной группой. Для тех и других пространств группа изометрических вращений около точки (группа изотропии) является простой унитарной или распадается на простые унитарные группы.

XI.

Я укажу только две проблемы из теории групп, разрешение которых связано с рассмотрением пространств E .

Известно, что с точки зрения Ли всякая непрерывная группа может быть образована при помощи бесконечно-малых преобразований; в действительности всякое конечное преобразование, достаточно близкое к тождественному, может быть получено бесконечным повторением одного и того же бесконечно-малого преобразования подобно тому, как вращение на конечный угол α около оси может быть получено бесконечным повторением вращения на бесконечно-малый угол вокруг этой оси. Но имеются случаи, где некоторая часть конечных преобразований группы не может быть образована подобным образом. Например, унимодулярная вещественная подстановка с тремя переменными:

$$x' = ax, y' = by, z' = cz, \quad (abc = 1)$$

где a положительно, b и c отрицательны, не может быть образована при помощи бесконечно-малой вещественной линейной подстановки.

В частности, в случае простых структур комплексная и унитарная вещественные группы полностью могут быть образованы при помощи их бесконечно-малых преобразований, в то время как это не имеет места, вообще говоря, для не унитарных вещественных групп. Справедливо утверждение, что каждое конечное преобразование может быть рассматриваемо как произведение некоторого числа преобразований, из которых каждое имеет образующее его бесконечно-малое преобразование, но *a priori* не известно, является ли это число ограниченным. Между тем, теория пространств E с отрицательной кривизной дает нам на этот счет точное и простое указание.

В самом деле, пусть G есть не унитарная вещественная группа, E — пространство с отрицательной кривизной, для которого G является группой движений. Фиксируем некоторую точку O пространства. Среди движений пространства будем различать вращения около O и сдвиги (transvections); я обозначаю этим термином перемещение, при котором некоторая геодезическая линия скользит по себе самой, а векторы, выходящие из ее точек, переносятся параллельно в смысле Леви-Чивита; рассматриваемая геодезическая линия называется осью (базой) сдвига. Каждое движение может быть разложено одним и только одним способом на вращение около O и сдвиг, имеющий ось геодезическую линию, проходящую через O . Но каждое из этих составляющих движений может быть образовано из бесконечно-малого движения (вращения или бесконечно-малого сдвига). Следовательно, каждое конечное преобразование группы G может быть разложено единственным способом на два преобразования, каждое из которых имеет образующее бесконечно-малое преобразование. Так, например, всякая линейная унимодулярная вещественная подстановка может быть разложена единственным способом на ортогональную подстановку и симметрическую положительную подстановку (т. е. на подстановку, вековое уравнение которой имеет все корни вещественные и положительные).

XII.

Вторая проблема, которую я хотел бы указать, заключается в следующем: я уже говорил, что данной (инфинитезимальной) структуре соответствует бесконечное множество групп G , но все эти группы между собою изоморфны. Это не будет уже справедливо, если мы будем рассматривать область существования этих групп в целом; может случиться, что преобразованию одной из этих групп соответствует несколько и даже бесконечное количество преобразований другой группы. Так, вещественному проективному преобразованию одной переменной соответствуют две унимодулярные линейные подстановки двух пере-

менных. Можно всегда вообразить такую абстрактную группу G' , что всякому преобразованию группы G' соответствует одно и только одно преобразование какой-нибудь одной из групп G , между тем как преобразованию этой группы G может соответствовать несколько преобразований группы G' . Эта группа G' имеет односвязную область, т. е. всякий замкнутый контур в этой области приводится к нулю (может быть стянут в точку) непрерывной деформацией. Каждая группа G , которая имеет изоморфизм не взаимно-однозначный (в целом) с G' , не будет односвязной, и число замкнутых контуров, неприводимых между собой при помощи непрерывной деформации в области группы G , равно числу преобразований группы G' , соответствующих тождественному преобразованию группы G ; число это может быть конечным или бесконечным; указанные преобразования группы G' образуют дискретную группу, которую можно назвать группой связности для группы G .

Вейль доказал ¹⁾, что каждая простая вещественная унитарная группа имеет конечную группу связности, причем можно добавить, что всегда существует линейная односвязная группа указанной вещественной унитарной структуры. Группы связности простых вещественных унитарных групп известны. Но метод, с помощью которого Вейль получил этот фундаментальный результат, не приложим к вещественным не унитарным формам простых групп, например, к проективной вещественной группе, к линейной вещественной группе неопределенной квадратичной формы и т. д. Пространства же E с отрицательной кривизной, соответствующие вещественным не унитарным группам, дают нам непосредственный метод для решения проблемы. Действительно, пусть G будет группой движений пространства E . Каждое преобразование группы G одним и только одним способом разлагается на вращение около фиксированной точки O и на сдвиг, переводящий точку O в некоторую точку A и вполне определяющийся положением точки A . Отсюда следует, что каждый замкнутый контур в области

¹⁾ Math. Zeitschr., 24, 1925, стр. 380.

группы G приводится к двум замкнутым контурам: одному, расположенному в области группы вращения (группы изотропии), другому — в области сдвигов, т. е. в конечном итоге в пространстве E . Так как пространство E односвязно, то второй замкнутый контур приводим к нулю. Таким образом, два замкнутых контура, принадлежащих области полной группы G , будут приводимы один к другому тогда и только тогда, если соответствующие контуры в области группы изотропии обладают тем же свойством. Иначе говоря, группа связности для G тождественна группе связности группы изотропии, а так как эта последняя является линейной унитарной группой или разлагается на унитарные и (в некоторых случаях) однопараметрическую группу, изоморфную группе вращений на плоскости, то легко определить ее группу связности, так что предложенная проблема решена. Общий вывод таков. Группа связности всякой простой вещественной не унитарной группы или образована из конечного числа операций, или разлагается на конечную группу и циклическую группу бесконечного порядка.

Я укажу только на один любопытный результат. Группа связности проективной вещественной группы одного переменного бесконечна, между тем как для проективной группы многих переменных она является конечной.

Между прочим, во всех случаях можно действительно построить для данной вещественной не унитарной группы простой структуры односвязную группу G' ; только эта группа не является обязательно линейной, как в случае унитарных форм. В случае вещественной проективной группы одного переменного, односвязная группа G' дается, например, следующей формулой:

$$\operatorname{tg} x' = \frac{a \operatorname{tg} x + b}{a' \operatorname{tg} x + b'}.$$

Тождественному проективному преобразованию ($a = b' = 1$, $a' = b = 0$) соответствует бесконечное число преобразований

$$x' = x + n\pi \quad (n — \text{целое}).$$

Предыдущий метод применим также к простой комплексной группе, которая имеет ту же группу связности, что и вещественная унитарная группа.

XIII.

Пространства E , о которых я только что говорил, являются пространствами Клейна, имеющими в качестве фундаментальной группы группу их движений. Существование этих пространств показывает, что всякая геометрия Клейна с простой фундаментальной группой превращается в риманову соответствующим выбором основного элемента пространства; выбор является, в сущности, единственным¹⁾, если фундаментальная группа комплексная или вещественная не унитарная; он будет многозначным, если фундаментальная группа является вещественной унитарной²⁾). Этот результат распространяется, очевидно, на полупростую группу. Если принять во внимание, что наиболее важные геометрии Клейна это те, у которых фундаментальные группы или простые или полупростые (геометрии проективная, аффинная, конформная, Лагерра, Эрмита и т. д.), то мы придем к тому неожиданному выводу, что риманова геометрия (с определенным ds^2) занимает совершенно привилегированное положение. Исходя в начале этого доклада из антагонизма между геометриями Клейна и общей римановой геометрией, мы приходим, совершив большой обход, к тому утверждению, что именно в римановой форме геометрии Клейна или, по крайней мере, наиболее важные среди них, лучше раскрывают свои ос-

1) Это значит, что, если имеются две системы основных элементов, приводящих к римановой геометрии, то можно установить между элементами этих систем взаимно-однозначное соответствие такое, что два соответствующих элемента будут инвариантны относительно одной и той же подгруппы фундаментальной группы; в сущности это та подгруппа, которая согласно идеям Клейна и Пуанкаре определяет „точку“ пространства.

2) В этом последнем случае могут появиться, кроме того, римановы формы с кручением, причем кривизна и кручение будут сохраняться при параллельном переносе.

новые свойства. Можно было бы много сказать об этой геометрической стороне вопроса¹⁾. Я ограничусь указанием одной интересной проблемы.

Известна та важная роль, которую играет принцип двойственности в проективной геометрии; но этот принцип совершенно не проявится, если ограничиться непрерывной частью фундаментальной группы этой геометрии, именно, группой коллинеаций (полная фундаментальная группа проективной геометрии образована из коллинеаций и корреляций). В каждой геометрии Клейна с данной непрерывной фундаментальной группой наиболее интересным является решение вопроса о том, нельзя ли эту непрерывную группу дополнить другими семействами преобразований, аналогичных коррелятивным преобразованиям проективного пространства. В этой проблеме теория унитарных групп дает полное решение в тех случаях, когда фундаментальная группа является простой или полупростой. Я укажу только на довольно интересный результат, — именно, что в геометрии Кели 7 измерений, абсолютом которой является квадра

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2 = 0,$$

группа собственных движений дополняется 23 другими семействами преобразований.

Надеюсь, что я показал Вам все разнообразие проблем, которые позволяют ставить и разрешать, опираясь друг на друга, теория групп и геометрия. Здесь мы имеем широкое поле для исследований, обещающее очень интересные результаты.

¹⁾ В арифметике и теории функций существование этих римановых форм играет важную роль. Таким именно образом Пуанкаре привел вопрос о возможности общей теории гиперфуксовых дискретных групп к римановой форме, которую можно ввести в геометрию неопределенной формы Эрмита (С. R., 98, 1881, стр. 543); теория фуксовых групп и групп Клейна также приводится к неевклидовым геометриям 2 и 3 измерений, — римановым формам проективных геометрий вещественной прямой и прямой комплексной.

Э. КАРТАН

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА,
ОСНОВАННЫЕ НА ПОНЯТИИ
ПЛОЩАДИ

Actualités scientifiques et industrielles

72

EXPOSÉS DE GÉOMÉTRIE

Publiés sous la direction de

M. E. CARTAN

Membre de l'Institut

Professeur à la Sorbonne

I

LES

E S P A C E S M É T R I Q U E S

FONDÉS SUR LA NOTION

D'AIRE

par

E. CARTAN

Paris

HERMANN et C^{ie}, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1933

I. Введение.

1. Известно, каким образом Риман¹⁾ обобщил элементарную или евклидову геометрию путем введения метрик более общих, чем метрика Пифагора. Если дано пространство n измерений, отнесенное к какой-либо системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$, Риман полагает, что понятие расстояния определено в этом пространстве, по крайней мере, для двух бесконечно близких точек, и что известно аналитическое выражение этого расстояния в виде квадратного корня из квадратичной дифференциальной формы

$$(1) \quad ds = \sqrt{\sum g_{ij} dx^i dx^j},$$

где коэффициенты g_{ij} являются заданными функциями переменных x^i ; сверх того, он предполагает, что форма, стоящая под радикалом,—определенная, и, следовательно, дискриминант ее не равен нулю. Геометрия, основанная на задании метрики (1), получила широкое развитие и известна под именем римановой геометрии.

Риман также отметил возможность задавать расстояние между двумя бесконечно близкими точками аналитическим выражением более общего вида, а именно, полагать, что ds является некоторой функцией от x^i и dx^i , однородной первого измерения относительно dx^i .

¹⁾ B. Riemann, Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen (Habilitationsschrift, 1854: Gött. Abh., 13, 1868, 9; Gesammelte Werke, 2 Aufl. Leipzig, 1892, S. 272; Oeuvres math., trad. L. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1898, p. 280). [Б. Риман. О гипотезах, лежащих в основе геометрии (перевод Д. Синцова). Известия Физ.-Мат. Общества при Казанском университете (2) 3, Приложения 67—82 (1893)]. О римановой геометрии см. E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris, Gauthier-Villars, 1928. [Э. Картан. Геометрия римановых пространств. ОНТИ. 1936].

В этой более общей геометрии, которая тоже являлась предметом довольно многочисленных исследований, в частности, со стороны Р. Finsler'a¹⁾, как и в собственно римановой геометрии, важную роль играют геодезические линии, дающие минимум расстояния между двумя точками; следовательно, геометрия Римана и более-общая геометрия Финслера имеют тесную связь с вариационным исчислением.

Вместо того, чтобы основывать геометрию на понятии расстояния, можно было бы попытаться основать ее на понятии площади. Тогда, в случае трех измерений, пришлось бы исходить из данного а priori аналитического выражения площади элемента поверхности²⁾. Так, если пространство отнесено к некоторой системе координат x, y, z , мы, рассматривая поверхность, определенную уравнением $z=f(x, y)$, приняли бы

$$d\sigma = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy.$$

Экстремали—поверхности, дающие экстремум интегралу $\iint F d\sigma$,—играли бы естественно в этой геометрии важную роль. Насколько мне известно, никто не пытался построить геометрию, встав на эту точку зрения. Я намереваюсь показать, как возможно выполнить такое построение. Сначала необходимо указать общую точку зрения, которую можно принять в вопросах этого рода. Я буду пользоваться в дальнейшем обозначениями классического абсолютного дифференциального исчисления.

2. Вернемся сначала к собственно риманову пространству. Если оставаться в окрестности данной точки M этого пространства, то расстояние этой точки до каждой беско-

1) Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, Dissert., Göttingen 1918.

2) Понятно, в *плоской* геометрии нельзя основать даже афинной геометрии на единственном понятии площади, так как элемент площади $dx dy$ инвариантен по отношению к *бесконечной* группе точечных преобразований.

нечно близкой точки выражается точно таким же образом, как если бы это было в евклидовом пространстве, отнесенном к выбранной соответствующим образом декартовой системе координат, а именно, векторы, взятые в направлении каждой из осей за координатные, должны только удовлетворять условию, чтобы скалярное произведение i -го и j -го этих векторов было равно численному значению, которое принимает в точке M коэффициент g_{ij} фундаментальной квадратичной формы. Квадрат длины вектора $(X^1, X^2, \dots, X^n)$ с началом в M будет выражаться, как и в евклидовой геометрии, квадратичной формой ¹⁾

$$g_{ij} X^i X^j;$$

скалярное произведение двух векторов X^i, Y^i есть не что иное, как полярная форма

$$g_{ij} X^i Y^j.$$

3. Большой прогресс в развитии римановой геометрии вызвало введенное Леви-Чивита понятие *параллельного переноса*; это понятие позволило ему определить абсолютный дифференциал вектора (X^i) с переменным началом при бесконечно-малом перемещении начала; когда вектор перемещается так, что его абсолютный дифференциал равен нулю, т. е. когда он перемещается параллельно, его длина остается неизменной; так же обстоит дело и со скалярным произведением двух векторов, имеющих общее начало и перемещающихся параллельно. Еще лучше будет понято значение этого нового понятия, если его представить следующим образом. Рассмотрим две бесконечно близкие точки M и M' пространства. Можно каждую из этих точек рассматривать как центр бесконечно-малой части евклидова пространства; далее, можно обе эти части отнести к одному и тому же евклидову пространству, так как можно найти угол между любыми двумя направлениями, исходящими одно из M , другое из M' . Если связать с точ-

¹⁾ В соответствии с условным обозначением, введенным Эйнштейном, мы будем отбрасывать знак суммирования, когда он относится к одному и тому же индексу, повторенному два раза.

кой M декартов репер, с точкой M' аналогичный декартов репер, то переход от одного репера к другому происходит по формулам, идентичным тем, которые в евклидовой геометрии служат для преобразования декартовых координат. Мы можем сказать, что пространство оказалось наделенным евклидовой связностью.

Но евклидова связность, определенная параллельным переносом Леви-Чивита, не является наиболее общей связностью, которую можно вообразить; ничто не мешает нам дать иной закон параллельного переноса, лишь бы при этом переносе длина вектора и угол между двумя векторами, имеющими общее начало, оставались неизменными. Так, если нам дана дуга кривой AB и в каждой точке этой дуги определенный декартов репер, то можно в евклидовом пространстве сделать карту (carte)¹⁾ дуги AB и ее различных реперов, ибо, фиксируя начальное положение точки A и соответствующий ей репер, мы будем постепенно определять положение последующего репера по отношению к предшествующему, только что построенному. При этом для абсолютного дифференциала переменного вектора с началом (x^i) и с составляющими X^i мы примем выражение вида

$$DX^i = dX^i + X^k \Gamma_{kh}^i dx^h = dX^i + X^k \omega_k^i.$$

В теории Леви-Чивита коэффициенты Γ_{kh}^i симметричны относительно обоих нижних индексов; в более общей теории они—любые.

4. Итак, пространство с евклидовой связностью определяется заданием

1° фундаментальной дифференциальной формы $g_{ij} dx^i dx^j$,

2° коэффициентов Γ_{kh}^i , определяющих параллельный перенос.

При этом существуют необходимые соотношения между g_{ij} и Γ_{kh}^i , а именно те, которые выражают, что вектор не изменяет длины, когда его абсолютный дифференциал равен

¹⁾ [отображение].

нулю; эти соотношения даются равенствами

$$dg_{ij} = g_{ik} \omega_j^k + g_{jk} \omega_i^k,$$

или

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{ik} \Gamma_{jh}^k + g_{jk} \Gamma_{ih}^k.$$

В абсолютном дифференциальном исчислении вводят наряду с составляющими X^i вектора (контравариантными составляющими) его ковариантные составляющие X_i , которые являются, по определению, скалярными произведениями данного вектора на координатные векторы:

$$X_i = g_{ik} X^k.$$

Обратно от X_i переходим к X^i по формулам

$$X^i = g^{ik} X_k,$$

где g^{ij} являются минорами элемента g_{ij} , разделенными на дискриминант g фундаментальной формы. Квадрат длины вектора выражается тогда любой из формул

$$g_{ij} X^i X^j = X^i X_i = g^{ij} X_i X_j.$$

Аналогично рассматриваются величины

$$\Gamma_{jkh} = g_{kl} \Gamma_{jh}^l, \quad \Gamma^{jkh} = g^{jl} g^{hm} \Gamma_{lm}^k, \dots$$

Также имеем

$$(2) \quad \begin{cases} dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji}, & \text{или} \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = \Gamma_{ijh} + \Gamma_{jih}; \\ dg^{ij} = -\omega^{ij} - \omega^{ji}, & \text{или} \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^h} = -\Gamma_{jh}^{ij} - \Gamma_{ih}^{ji}. \end{cases}$$

Напомним, наконец, что объем, построенный на n векторах с общим началом, равен детерминанту, образованному из контравариантных составляющих этих векторов, умноженному на объем, построенный на n координатных векторах; а этот последний объем равен $\sqrt{g}$, т. е. квадратному корню из дискриминанта фундаментальной формы.

5. Понятия пространства с евклидовой связностью оказывается уже недостаточно для обоснования геометрии

Финслера, а тем более той геометрии, которую мы намереваемся построить. Вернее, этому понятию следует придать смысл несколько более широкий. В предшествующем изложении пространство рассматривалось состоящим из очень большого числа маленьких кусочков евклидова пространства с определенным законом соотношения двух смежных кусочков, каждый из которых образует окрестность некоторой точки. Вместо того, чтобы строить пространство из *точечных* кусочков, мы будем представлять себе пространство как многообразие *касательных элементов* (*comme un lieu d'éléments de contact*), где каждый элемент является совокупностью точки и плоскости, проходящей через эту точку. С этой точки зрения пространство имеет 5 измерений. Итак, мы будем представлять себе, что в окрестности каждого из этих элементов пространство обладает всеми свойствами евклидова пространства и, сверх того, что для двух данных бесконечно близких элементов имеется закон соответствия (*loi de raccord*) двух кусочков евклидовых пространств, из которых одно находится в окрестности первого элемента, другое — в окрестности второго. Посмотрим теперь, как это выразится аналитически.

Будем исходить из определенного элемента (E) с центром M . Пусть (E') с центром M' будет соседний элемент. Поскольку все здесь происходит как в евклидовой геометрии, квадрат расстояния MM' будет выражен квадратичной формой от составляющих dx^i вектора $\overrightarrow{MM'}$

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j;$$

однако коэффициенты g_{ij} будут зависеть не только от координат центра M , но и от ориентации плоскостного элемента, имеющего M центром. Направление элемента может быть определено n однородными координатами $u_1, u_2, \dots, u_n$, коэффициентами линейного уравнения

$$u_1 dx^1 + u_2 dx^2 + \dots + u_n dx^n = 0,$$

которое определяет направления, касательные к элементу. Итак, g_{ij} являются функциями от x^i и u^i , однородными ну-

левого измерения относительно u^i . От понятия бесконечно-малого вектора dx^i переходим к понятию конечного вектора X^i : квадрат длины такого вектора дается выражением

$$g_{ij} X^i X^j,$$

но нужно обратить внимание на то, что эта длина зависит от элемента (E), проведенного через начало вектора: элемент этот мы назовем *опорным элементом* (l'élément d'appui) вектора. Мы не можем более требовать, чтобы длина вектора, данного своими составляющими X^i , оставалась неизменной при изменении его опорного элемента; так же обстоит дело и с направлением вектора.

Чтобы завершить определение евклидовой связности пространства, достаточно будет задать абсолютный дифференциал вектора при бесконечно-малом изменении его опорного элемента. Этот абсолютный дифференциал будет дан формулами вида

$$DX^i = dX^i + X^k C_k^{ih} du_h + X^k \Gamma_{kh}^i dx^h,$$

где коэффициенты C_k^{ih} и Γ_{kh}^i являются функциями x^i и u^i , причем относительно u_i — функциями однородными соответственно первого и нулевого измерений.

Величины g_{ij} , C_k^{ih} , Γ_{kh}^i не произвольны. Нужно еще потребовать, чтобы вектор сохранял длину, когда его абсолютный дифференциал равен нулю, что выражается следующими соотношениями

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_h} = g_{ik} C_j^{kh} + g_{jk} C_i^{kh}, \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = g_{ik} \Gamma_{jh}^k + g_{jk} \Gamma_{ih}^k. \end{cases}$$

Если связность дана, мы сумеем узнать, будут ли два бесконечно близких элемента параллельными. Чтобы проще всего установить это, нужно рассмотреть вектор, нормальный к элементу, например, вектор, ковариантные составляющие которого будут $u_1, u_2, \dots, u_n$, и выяснить, будут

ли два таких вектора, нормальных к двум бесконечно близким элементам, параллельными или нет ¹⁾).

В последующих приложениях чаще будут входить контравариантные составляющие g^{ij} фундаментального тензора. Для них получаем соотношения

$$(3') \quad \begin{cases} \frac{\partial g^{ij}}{\partial u_h} = -C^{ijh} - C^{jih}, \\ \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -\Gamma_{k}^{ij} - \Gamma_{k}^{ji}. \end{cases}$$

Знак — объясняется тем, что абсолютный дифференциал вектора с данными ковариантными составляющими X_i выражается формулой

$$DX_i = dX_i - X_k C_i^{kh} du_h - X_k \Gamma_{ih}^k dx^h,$$

а дифференциал квадрата длины вектора, т. е. дифференциал от $g^{ij} X_i X_j$, если вектор остается параллельным самому себе, будет равен нулю:

$$\begin{aligned} dg^{ij} X_i X_j + g^{ik} X_i X_j (C_k^{jh} du_h + \Gamma_{kh}^j dx^h) + \\ + g^{kj} X_i X_j (C_k^{ih} du_h + \Gamma_{kh}^i dx^h) = \\ = [dg^{ij} + (C^{ijh} + C^{jih}) du_h + (\Gamma_{ih}^{ij} + \Gamma_{jh}^{ji}) dx^h] X_i X_j = 0. \end{aligned}$$

II. Первые метрические понятия, связанные с кратным интегралом.

6. Мы в состоянии теперь приступить к намеченной нами проблеме.

Рассмотрим сначала в пространстве трех измерений интеграл

$$\iint F(x, y, z, p, q) dx dy,$$

распространенный на кусок поверхности $z=f(x, y)$, причем

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

¹⁾ Так как параллельный перенос сохраняет длины, то абсолютный дифференциал вектора постоянной длины перпендикулярен к этому вектору.

Предположим, что этот интеграл распространен на кусок экстремальной поверхности (Σ), ограниченный контуром (C). Деформируем слегка контур и проведем через деформированный контур (C') определяемую им экстремальную поверхность. Двойной интеграл претерпевает при этом малую вариацию, равную, как можно показать, интегралу¹⁾

$$\iint \left(F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) dx dy - \frac{\partial F}{\partial p} dy dz - \frac{\partial F}{\partial q} dz dx,$$

распространенному на краевую полосу, описанную контуром (C) при его деформировании: в этом интеграле p , q означают направляющие параметры плоскости, касательной к экстремальным поверхностям, проходящим через каждые последовательные положения контура (C). Это показывает, что элемент двойного интеграла

$$\left(F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q} \right) dx dy - \frac{\partial F}{\partial p} dy dz - \frac{\partial F}{\partial q} dz dx,$$

где p и q не являются более частными производными от z по x и y , связан инвариантным образом с данным интегралом. Для того, чтобы вариация площади куска изменяемой экстремали была равна нулю, достаточно, чтобы плоскость, касательная к краевой полосе, описанной контуром, содержала некоторое направление, вполне определенное для каждой из точек полосы этой точкой и плоскостью, касающейся экстремали, проходящей через эту точку: направляющие параметры этого направления будут

$$-\frac{\partial F}{\partial p}, \quad -\frac{\partial F}{\partial q}, \quad F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q};$$

оно зависит только от элемента (x, y, z, p, q), определенного точкой (x, y, z) и плоскостью с параметрами p, q . Естественно говорить *условно*, что это направление *нор-*

¹⁾ Эта формула, повидимому, была выведена Th. de Donder'ом в „Théorie invariante du calcul des variations“ (Bull. Acad. de Belg., 1929, chap. 1). См. в работе Th. de Donder'a, носящей то же заглавие (Paris, Gauthier-Villars, 1930) заметку Th. Lepage'a „Sur certaines formes différentielles,...“

мально к элементу. С другой стороны, также естественно условиться, что $F dx dy$ представляет площадь элемента поверхности, касательная плоскость к которому имеет параметры p, q .

Чтобы иметь более симметричный счет, введем, как выше, для направления плоскости с параметрами p, q однородные координаты u, v, w :

$$\frac{u}{-p} = \frac{v}{-q} = \frac{w}{1},$$

и положим

$$wF\left(x, y, z; -\frac{u}{w}, -\frac{v}{w}\right) = L(x, y, z; u, v, w),$$

где L однородно первого измерения по отношению к u, v, w . Получаем

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{\partial L}{\partial v} = -\frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{\partial L}{\partial w} = F - p \frac{\partial F}{\partial p} - q \frac{\partial F}{\partial q},$$

так что направляющие параметры нормали к элементу (u, v, w) таковы

$$\frac{\partial L}{\partial u}, \quad \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \frac{\partial L}{\partial w}.$$

Элемент площади будет

$$(4) \quad d\sigma = \frac{\partial L}{\partial u} dy dz + \frac{\partial L}{\partial v} dz dx + \frac{\partial L}{\partial w} dx dy,$$

где (u, v, w) параметры плоскости, касательной к элементу поверхности.

7. Это позволит нам, предполагая известной метрику в окрестности элемента $(x, y, z; u, v, w)$, вычислить длину l нормального вектора, контравариантные составляющие которого равны

$$\frac{\partial L}{\partial u}, \quad \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \frac{\partial L}{\partial w}.$$

В самом деле, будем рассматривать элемент поверхности

как параллелограм, построенный на двух векторах $dx, dy, dz; \delta x, \delta y, \delta z$. Получим

$$d\sigma = \begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial u}, & \frac{\partial L}{\partial v}, & \frac{\partial L}{\partial w} \\ dx, & dy, & dz \\ \delta x, & \delta y, & \delta z \end{vmatrix}.$$

Правая часть здесь — определитель, составленный из контравариантных составляющих трех векторов, одного длиной l , нормального к элементу, и двух других, лежащих в элементе и образующих параллелограм площади $d\sigma$. Следовательно, объем параллелепипеда, образованного этими тремя векторами, равен $l d\sigma$; с другой стороны, этот объем равен определителю, умноженному на $\sqrt{g}$; итак, имеем

$$\sqrt{g} d\sigma = l d\sigma;$$

откуда

$$l = \sqrt{g}.$$

Вследствие этого, *единичный вектор, нормальный к элементу (u, v, w) , имеет контравариантные составляющие*

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial w}.$$

8. Обобщим эти результаты на случай $(n-1)$ -кратного интеграла в пространстве n измерений. Элемент этого пространства будет определен как совокупность точки (x^i) и направления (u_i) гиперплоскости, проходящей через эту точку. Данный интеграл введет функцию L , однородную первого измерения относительно u_i , и мы будем иметь благодаря соотношениям, аналогичным предшествующим, следующую теорему:

Контравариантные составляющие вектора единичной длины нормального к элементу (u_i) , равны n величинам

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial u_i}.$$

С другой стороны, вектор с ковариантными составляющими u_i необходимо нормален к элементу; а так как его скалярное произведение на единичный нормальный вектор

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial u_i}$$

равно

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial u_i} u_i = \frac{1}{\sqrt{g}} L,$$

то отсюда следует, что ковариантные составляющие единичного нормального вектора будут равны

$$\sqrt{g} \frac{u_i}{L}.$$

Отсюда вытекают соотношения для составляющих еще неизвестной фундаментальной формы

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial L}{\partial u_i} = g^{ik} \sqrt{g} \frac{u_k}{L}$$

или

$$(1) \quad L \frac{\partial L}{\partial u_i} = g g^{ik} u_k.$$

III. Определение метрики в окрестности каждого элемента пространства.

9. Число уравнений (1) равно n , тогда как для установления определенной метрики в окрестности элемента (x^i, u_i) имеем $\frac{n(n+1)}{2}$ неизвестных. Чтобы завершить это опре-

деление, мы будем рассматривать абсолютную геометрическую вариацию, испытываемую вектором, когда его начало неподвижно, а его опорный элемент поворачивается вокруг своего центра. Эта вариация дается выражением

$$(5) \quad DX^i = dX^i + X^k C_k^{ih} du_h.$$

Рассмотрим, в частности, вектор, у которого контравариантные составляющие остаются неизменными; получим

$$DX^i = X^k C_k^{ih} du_h = X_k C^{kih} du_h.$$

Поэтому скалярное произведение вектора DX^i на вектор Y_i будет

$$Y_i X_k C^{kih} du_h.$$

Условимся считать это скалярное произведение симметричным относительно обоих векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$; это условие имеет внутренне-геометрический (de nature intrinsèque) характер. Оно нам дает соотношения

$$(II) \quad C^{ijh} = C^{jih}.$$

Эти соотношения, будучи присоединены к (3')

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u_h} = -C^{ijh} - C^{jih}.$$

доставляют значения

$$(III) \quad C^{ijh} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial u_h}.$$

Итак, составляющие C^{ijh} евклидовой связности были бы определены, если бы была известна метрика g^{ij} .

10. Мы введем теперь еще новое условие, имеющее, как и предшествующее, внутренне-геометрический характер (de nature intrinsèque). Мы имели, что составляющие абсолютной геометрической вариации DX^i вектора, сохраняющего фиксированные контравариантные составляющие, линейны относительно X^k , если опорный элемент только поворачивается вокруг своего центра. Возьмем систему $n-1$ векторов, касательных к элементу (u_i) , контравариантные составляющие которых известны, и выразим:

1° что при бесконечно-малом вращении элемента геометрические вариации $n-1$ векторов остаются все в начальном элементе;

2° что $(n-1)$ -мерный объем параллелепипеда, построенного на этих $n-1$ векторах, не изменяет своего значения, выбрать ли за опорный элемент этих векторов начальный элемент до его вращения или после его вращения.

Первое условие эквивалентно следующему: вектор, нормальный к элементу и сохраняющий фиксированные контра-

вариантные составляющие при бесконечно-малом вращении опорного элемента, не изменяет своего абсолютного направления ¹⁾: следовательно, он не остается более нормальным к опорному элементу в его новом положении.

Второе условие может быть выражено следующим образом. Рассмотрим n -мерный параллелепипед, построенный на $n - 1$ векторах, лежащих в элементе, и на n -ом векторе, нормальном к элементу; оставим фиксированными контравариантные составляющие каждого из этих векторов и повернем бесконечно-мало опорный элемент; тогда вариация числа, измеряющего объем параллелепипеда, должна быть равна вариации числа, измеряющего длину нормального вектора.

Это последнее условие может быть еще упрощено. В самом деле, объем параллелепипеда равен произведению определителя, который будет оставаться неизменным, на $\sqrt{g}$. Так что достаточно будет выразить, что абсолютный дифференциал нормального вектора с неизменными контравариантными составляющими равен этому вектору, умноженному на $\frac{1}{2} \frac{dg}{g}$. Таким образом будут осуществлены сразу оба условия.

Возьмем, например, вектор с ковариантными составляющими u_i , и, следовательно, с контравариантными составляющими $\frac{1}{g} L \frac{\partial L}{\partial u_i}$. i -ая контравариантная составляющая его абсолютного дифференциала будет

$$u_k C^{kih} du_h = -\frac{1}{2} u_k dg^{ik};$$

¹⁾ В самом деле, пусть $\vec{N}$ — вектор с фиксированными контравариантными составляющими, нормальный к элементу (u^i), а $\vec{X}$ произвольный вектор, касательный к элементу, также с фиксированными контравариантными составляющими. Закон симметрии $\vec{N} \vec{DX} = \vec{X} \vec{DN}$ показывает, что предположение „ $\vec{DX}$ нормально к $\vec{N}$ “ влечет „ $\vec{DN}$ нормально к $\vec{X}$ “.

выразим согласно условию, что она равна

$$\frac{1}{2} \frac{dg}{g} g^{ik} u_k;$$

отсюда выводим после очевидного счета

$$u_k d(g g^{ik}) = 0;$$

так что дифференцирование уравнений (I)

$$g g^{ik} u_k = L \frac{\partial L}{\partial u_i}$$

дает

$$(IV) \quad g g^{ij} = L \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial L}{\partial u_i} \frac{\partial L}{\partial u_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (L^2)}{\partial u_i \partial u_j}.$$

Эти уравнения совместны с n уравнениями (I). В самом деле, умножение (IV) на u_j и суммирование по j дают

$$g g^{ij} u_j = L u_i \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial L}{\partial u_i} u^j \frac{\partial L}{\partial u_j} = L \frac{\partial L}{\partial u_i},$$

если учесть, что $\frac{\partial L}{\partial u_i}$ однородно и имеет измерение нуль относительно u_i ¹⁾.

Остается закончить определение метрики. Рассмотрим для этого определитель Δ , элементы которого

$$a^{ij} = L \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} + \frac{\partial L}{\partial u_i} \frac{\partial L}{\partial u_j}.$$

Этот определитель, являющийся не чем иным, как гесс-ианом формы $\frac{1}{2} L^2$, не равен нулю, если данный интеграл соответствует регулярной проблеме вариационного исчисления; а это мы и будем предполагать в дальнейшем.

¹⁾ Можно сохранить лишь первое из двух условий, принятых в начале этого номера; второе является его следствием, как это показал бы несложный счет, если учитывать уравнения (I).

Значение Δ должно быть равно g^n , умноженному на определитель $|g^{ij}|$ который равен $\frac{1}{g}$. Итак, имеем

$$g = \Delta^{\frac{1}{n-1}} = |a^{ij}|^{\frac{1}{n-1}},$$

и, следовательно,

$$(V) \quad g^{ij} = \frac{1}{\Delta^{\frac{1}{n-1}}} \frac{\partial^2 (L^2)}{2 \frac{\partial u_i}{\partial u_j}}.$$

IV. Угловая метрика в некоторой точке.

11. Теперь мы в состоянии вычислить угол между двумя бесконечно близкими элементами с общим центром. Для этого мы рассмотрим единичный нормальный вектор и найдем его абсолютный дифференциал. Ковариантные составляющие этого вектора равны $\frac{\sqrt{g}}{L} u_i$, а ковариантные составляющие $\tilde{\omega}_i$ его абсолютного дифференциала будут

$$\tilde{\omega}_i = d \left(\sqrt{g} \frac{u_i}{L} \right) - \sqrt{g} \frac{u_k}{L} C_i^{kh} du_h.$$

Второй член правой части равен согласно предшествующему номеру

$$- \frac{1}{2} \frac{dg}{g} \sqrt{g} \frac{u_i}{L} = - \frac{u_i}{L} d \sqrt{g}.$$

Итак, имеем ковариантные составляющие абсолютного дифференциала единичного нормального вектора ¹⁾.

$$(VI) \quad \tilde{\omega}_i = \sqrt{g} d \frac{u_i}{L}.$$

Можно было бы рассмотреть и контравариантные состав-

¹⁾ Здесь легко проверить соотношение $\frac{\partial L}{\partial \eta_i} \tilde{\omega}_i = 0$, которое выражает, что абсолютный дифференциал единичного нормального вектора перпендикулярен к этому вектору.

ляющие $\tilde{\omega}^i$, данные выражением¹⁾

$$\tilde{\omega}^i = d \frac{L^i}{Vg} + \frac{L^k}{Vg} C_k^{ih} du_h;$$

учитывая, что второй член равен

$$\frac{1}{2} \frac{dg}{g} \frac{L^i}{Vg} = -L^i d \frac{1}{Vg},$$

получаем

$$(VII) \quad \tilde{\omega}^i = \frac{1}{Vg} dL^i.$$

Следовательно, $d\varphi^2$ —квадрат угла между двумя бесконечно-близкими элементами с общим центром—будет равен

$$\tilde{\omega}^i \tilde{\omega}_i = dL^i d \frac{u_i}{L} = \frac{1}{L} dL^i du_i - \frac{u_i}{L^2} dL^i dL;$$

замечая, что $u_i dL^i = u_i L^{ik} du_k$ равно нулю, так как L^k однородно нулевого измерения относительно $u_1, \dots, u_n$, получаем

$$(VIII) \quad d\varphi^2 = \frac{L^{ij}}{L} du_i du_j.$$

Так же быстро к этой формуле можно прийти, вычисляя $g^{ij} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j$.

V. Вектор $\vec{A}$ и тензор A^{ijk} .

12. Прежде, чем закончить определение евклидовой связности пространства, т. е. прежде, чем будет определен абсолютный дифференциал вектора при изменении и его начала, и его опорного элемента, мы введем вектор, который будет играть в дальнейшем важную роль.

Мы видели, что коэффициент n -мерного расширения n -вектора, когда центр опорного элемента остается фикс-

¹⁾ Мы положим в дальнейшем

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = L^i, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} = L^{ij}, \text{ и т. д.}$$

сированным, а сам опорный элемент поворачивается вокруг центра, равен $\frac{1}{2} \frac{dg}{g}$. Поскольку формы $\tilde{\omega}_i$ играют роль ковариантных векторов, постараемся представить $\frac{1}{2} \frac{dg}{g}$ в форме

$$\frac{1}{2} \frac{dg}{g} = A^1 \tilde{\omega}_1 + A^2 \tilde{\omega}_2 + \dots + A^n \tilde{\omega}_n = \sqrt{g} A^i d \frac{u_i}{L}.$$

Мы сейчас увидим, что это возможно бесконечным множеством способов. В самом деле, нам предстоит решить уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u_i} = \frac{\sqrt{g}}{L} A^i - \frac{\sqrt{g}}{L^2} A^k u_k \frac{\partial L}{\partial u_i}.$$

Умножая на u_i и суммируя по i , замечаем, что сумма, образованная в левой части, обращается в нуль, т. к. $\sqrt{g}$ — однородная функция нулевого измерения относительно u_i ; правая часть также обращается в нуль. Отсюда следует, что за $A^k u_k$ можно принять произвольную величину λ , и мы получаем

$$A^i = \frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{g}} \frac{\partial \log g}{\partial u_i} + \frac{\lambda}{L} \frac{\partial L}{\partial u_i} = -L \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial u_i} + \frac{\lambda}{L} \frac{\partial L}{\partial u_i}.$$

Но существует один и только один способ выбрать λ так, чтобы вектор A^i лежал в элементе u_i , а именно, для этого следует принять $\lambda = A^k u_k = 0$. Вектор, таким образом полученный, имеет внутренне-геометрическое (*intrin- sèque*) значение: его ковариантные составляющие

$$(IX) \quad A^i = -L \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial u_i}.$$

13. Геометрическое значение вектора $\vec{A}$ следующее. Вообразим бесконечно-малое вращение элемента вокруг его центра; это вращение можно задать вектором $\vec{\Omega}$, лежащим в элементе и представляющим абсолютный дифференциал

единичного нормального вектора. Рассмотрим теперь параллелепипед, построенный на n произвольных векторах; тогда коэффициент расширения его объема, когда n векторов сохраняют контравариантные составляющие, а их общий опорный элемент испытывает упомянутое вращение, равен скалярному произведению $\vec{\Omega} \vec{A}$.

Пространства, в которых вектор $\vec{A}$ обращается в нуль, что можно еще охарактеризовать независимостью гессиана формы $\frac{1}{2} L^2$ от u_i , обладают замечательными свойствами, заставляющими их играть промежуточную роль между римановыми пространствами и пространствами более общими.

14. Рассмотрим теперь вектор $\vec{X}$, у которого оставим неизменными при бесконечно-малом вращении $\tilde{\omega}_i$ опорного элемента вокруг центра контравариантные составляющие X^i и абсолютный дифференциал $\vec{D}\vec{X}$. Если $\vec{Y}$ — произвольный вектор с тем же центром, имеем

$$\vec{Y} \vec{D} \vec{X} = Y_i X_k C^{ikh} du_h = -\frac{1}{2} Y_i X_k \frac{\partial g^{ik}}{\partial u_h} du_h.$$

Сумма $u_k C^{ikh}$ равна нулю благодаря тому, что g^{ik} однородны нулевого измерения относительно $u_1, u_2, \dots, u_n$; итак, можно положить, учитывая (VI),

$$\vec{Y} \vec{D} \vec{X} = \frac{L}{Vg} Y_i X_k C^{ikh} \tilde{\omega}_h.$$

Можно было бы, не изменяя правой части, прибавить к C^{ikh} член вида $\rho^{ik} L^h$, но, если желательно сохранить соотношение $u_k C^{ikh}$, следует принять $\rho^{ik} = 0$. Вследствие этого, величины

$$A^{ijh} = \frac{L}{Vg} C^{ijh}$$

определяют тензор, симметрический относительно двух первых индексов.

Нетрудный счет дает

$$(X) \quad A^{ijk} = g^{ij} A^k - \frac{L}{4g^{3/2}} \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}.$$

Необходимое и достаточное условие того, что этот тензор равен нулю, заключается в независимости g^{ij} от u_k , т. е. в том, что функция $\frac{1}{2} L^2$ является однородным полиномом второй степени относительно $u_1, u_2, \dots, u_n$. Итак, пространства с тензором A^{ijh} , равным нулю, суть римановы пространства. Они образуют частный класс пространств с вектором $\vec{A}$, равным нулю.

15. Тензору A^{ijh} соответствует два контрактированных тензора, а именно, A_k^{ki} и A^{ik}_k . Первый вновь дает вектор A^i ; в самом деле, имеем

$$A_k^{ki} = g_{kh} A^{hki} = -\frac{1}{2} \frac{L}{\sqrt{g}} g_{kh} \frac{\partial g^{kh}}{\partial u_i} = -L \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{g}}}{\partial u_i} = A^i.$$

Что касается второго, то можно заметить из (X), что

$$A^{ik}_k - A_k^{ki} = A^i - g_k^k A^i = (1 - n) A^i.$$

Итак, имеем

$$(XI) \quad A^{ik}_k = (2 - n) A^i, \quad A_k^{ki} = A^i,$$

VI. Полное определение евклидовой связности.

16. Мы займемся теперь определением коэффициентов Γ_{kh}^i . Для этого введем следующее условие, имеющее внутренне-геометрический характер. Представим себе бесконечно-малый точечный цикл, исходящий из некоторой точки M и туда возвращающийся, и пусть (E) данный элемент с центром M . Осуществим в евклидовом пространстве построение карты этого цикла, относя каждой точке цикла элемент, выводимый шаг за шагом из (E) путем параллельного переноса. В карте, таким образом выполненной, цикл не

замкнется, если коэффициенты Γ_{kh}^i будут произвольными. Мы наложим на эти коэффициенты условие, потребовав, чтобы цикл замыкался.

Это условие то же самое, что и условие, налагаемое евклидовой связностью Леви-Чивита на коэффициенты Γ_{kh}^i в римановой геометрии. Но тогда как в римановой геометрии оно выражается соотношениями $\Gamma_{kh}^i = \Gamma_{hk}^i$, здесь это уже не будет так; дифференциалы du_i по предположению удовлетворяют условию, что абсолютный дифференциал единичного нормального вектора равен нулю. А из (VI), замечая, что в формулах (VI) и (VII) x^i приняты постоянными, имеем

$$\bar{\omega}_i = V\bar{g} d \frac{u_i}{L} + \left(\frac{u_i}{L} \frac{\partial V\bar{g}}{\partial x^h} - V\bar{g} \frac{u_k}{L} \Gamma_{ih}^k \right) dx^h,$$

откуда

$$(6) \quad du_i = u_i \frac{dL}{L} - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \log g}{\partial x^h} dx^h + u_k \Gamma_{ih}^k dx^h.$$

Возьмем теперь форму ω_i^j

$$\omega_i^j = C_i^{jk} du_k + \Gamma_{ih}^j dx^h,$$

Учитывая соотношения, которые связывают du_i с dx^h , а также соотношение $u_k C_i^{jk} = 0$, получим:

$$\omega_i^j = (\Gamma_{il}^j + C_i^{jh} u_k \Gamma_h^{kl}) dx^l.$$

Эти то коэффициенты, заключенные в скобки, и должны удовлетворять условию симметрии:

$$(XII) \quad \mathfrak{F}_{il}^j \equiv \Gamma_{il}^j + C_i^{jh} u_k \Gamma_h^{kl} - (\Gamma_{li}^j + C_l^{jh} u_k \Gamma_h^{ki}) = 0.$$

Еще нужно добавить уравнения (3)

$$(XIII) \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l} = -\Gamma_{li}^j - \Gamma_{lj}^i,$$

что и составит вместе n^3 уравнений с n^3 неизвестными.

17. Эффективное определение неизвестных и исследование системы будут отнесены в конец мемуара. Исследования

ние введет новый тензор

$$H^{ij} = g^{ij} + A_k A^{kij} = g^{ij} + A^i A^j - \frac{L}{4g^{3/2}} A_k \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k};$$

как видно, это — симметрический тензор. Если дискриминант этого тензора отличен от нуля, что представляет собой общий случай, система уравнений (XII) и (XIII) допускает одно и только одно решение; это, в частности, будет

иметь место, когда вектор $\vec{A}$ равен нулю. Если дискриминант $|H^{ij}|$ равен нулю, пространство будет названо *особенным*. Имеются различные классы особенных пространств, в соответствии с рангом матрицы H^{ij} . Пространство будет названо *вполне особенным* (totalement singulier), если ранг матрицы равен 1: величины H^{ij} не могут быть все нулями, так как имеем

$$H^{ih} u_h = g^{ih} u_h,$$

а эти равенства показывают, что для quadriки $H^{ij} X_i X_j = 1$ нормаль к элементу (u_i) является осью, причем длина соответствующей полуоси равна 1. Пространство будет вполне особенным, если $H^{ij} X_i X_j$ служит квадратом $\frac{L^i X_i}{Vg}$, т. е.

если $H^{ij} = \frac{L^i L^j}{g}$, что можно представить еще так

$$\frac{L}{2g} \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j} + A_k A^{kij} = 0.$$

В дальнейшем мы увидим геометрическую интерпретацию этого условия.

18. Даже особенному пространству всегда возможно придать *внутренне связанный* с ним класс евклидовых связностей, удовлетворяющих следующим условиям:

1° Кручение $\mathfrak{L}_{i1}^j p^{i1}$ одной из граней плюкерových составляющих p^{ij} равно нулю, если эта грань лежит в элементе (u_i) .

2° Кручение $\mathfrak{L}_{i1}^j p^{i1}$ грани, не удовлетворяющей этому условию, является вектором, отложенным на нормали к элементу.

Предшествующие условия оставляют еще $n-1$ неопределенных параметров, фиксирующих параллельный перенос элемента, когда его центр перемещается перпендикулярно к элементу.

Условия 1° и 2° выражаются равенствами следующего вида

$$(XIV) \quad \mathfrak{F}_{i,l}^j = \frac{L^j}{L} (u_i \sigma_l + u_l \sigma_i),$$

где параметры σ_i можно предположить связанными соотношением

$$u_k \sigma^k = 0.$$

Если пожелаем теперь, чтобы удовлетворялись условия (XII), достаточно будет приравнять σ_i нулю.

Мы будем говорить, что евклидова связность, удовлетворяющая условиям (XIII) и (XIV)—*полувнутренняя* (*semi-intrinsèque*); только класс *всех* полувнутренних связностей будет внутренне-геометрическим.

VII. Экстремальные гиперповерхности.

19. Мы видели (n° 6), по крайней мере для $n=3$, что, если дан кусок экстремальной гиперповерхности, ограниченный контуром ($n-2$) измерений, то вариация интеграла

$$\int \frac{1}{u_n} L dx^1 \dots dx^{n-1},$$

распространенного на этот кусок гиперповерхности, будет равна при бесконечно-малой деформации контура ($n-1$)-кратному интегралу

$$I = \int L^1 dx^2 dx^3 \dots dx^n - L^2 dx^1 dx^3 \dots dx^n + \dots,$$

распространенному на кусок гиперповерхности, описанный изменяющимся контуром. Отсюда следует, что если рассматривать в пространстве однопараметрическое семейство экстремалей, и если обозначить через u_i параметры гипер-

плоскости, касательной к той экстремали семейства, которая проходит через данную точку x^i , то интеграл I , распространенный на произвольную замкнутую поверхность, равен нулю. Вследствие этого получаем

$$\frac{dL^i}{dx^i} = 0,$$

где $\frac{dF}{dx^i}$ обозначает производную по x^i , взятую от функции F , зависящей от x^i и u_i , в которой u_i рассматриваются как функции x^i .

Далее мы увидим (Дополнение, n^0 5), что если рассматривать u_i как *неопределенные* функции x^i и придать пространству произвольную полувнутреннюю связность, то интеграл I , распространенный на произвольную замкнутую гиперповерхность, будет равен следующему интегралу, распространенному на объем, ограниченный этой гиперповерхностью

$$\int V \bar{g} (\bar{\omega}^1 dx^2 dx^3 \dots dx^n - \bar{\omega}^2 dx^1 dx^3 \dots dx^n + \dots).$$

Другими словами, если в формах $\bar{\omega}^i$ рассматривать u_i как неопределенные функции x^i и заменить du_i на $\frac{\partial u_i}{\partial x^h} dx^h$, то получим

$$\frac{\partial \bar{\omega}^i}{\partial (dx^i)} = \frac{1}{V \bar{g}} \frac{dL^i}{dx^i}.$$

20. Возьмем теперь некоторую экстремаль. Ее всегда можно рассматривать как одну из экстремалей некоторого однопараметрического семейства. Обозначая тогда через u_i параметры плоскостного элемента, касательного к экстремали этого семейства, проходящей через данную точку (x^i), будем иметь для каждого элемента объема пространства

$$\bar{\omega}^1 dx^2 dx^3 \dots dx^n - \bar{\omega}^2 dx^1 dx^3 \dots dx^n + \dots = 0.$$

Но абсолютный дифференциал единичного нормального вектора перпендикулярен к этому вектору; следовательно,

$u_n \tilde{\omega}^n = 0$. После замены $\tilde{\omega}^n$ на $-\frac{u_i}{u_n} \tilde{\omega}^i$ элемент интеграла примет вид

$$\frac{1}{u_n} (\tilde{\omega}^1 dx^2 dx^3 \dots dx^{n-1} - \tilde{\omega}^2 dx^1 dx^3 \dots dx^{n-1} + \dots + \\ + (-1)^n \tilde{\omega}^{n-1} dx^1 dx^2 \dots dx^{n-2}) (u_1 dx^1 + \dots + u_n dx^n).$$

Установив это, возьмем для вычисления элемента интеграла $n-1$ векторов, лежащих в экстремальной гиперповерхности и имеющих направления $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$, а n -ый вектор возьмем в направлении δ_n , нормальном к гиперповерхности. Элемент интеграла будет равен произведению $\frac{1}{u_n} u_i \delta_n x_i$ на элемент $(n-1)$ -кратного интеграла

$$\tilde{\omega}^1 dx^2 dx^3 \dots dx^{n-1} - \tilde{\omega}^2 dx^1 dx^3 \dots dx^{n-1} + \dots + \\ + (-1)^n \tilde{\omega}^{n-1} dx^1 dx^2 \dots dx^{n-2},$$

распространенного на элемент гиперповерхности. Вследствие этого, *условие того, что гиперповерхность является экстремалью, выражается равенством нулю $(n-1)$ -кратного интеграла*

$$\int \tilde{\omega}^1 dx^2 dx^3 \dots dx^{n-1} - \tilde{\omega}^2 dx^1 dx^3 \dots dx^{n-1} + \dots + \\ + (-1)^n \tilde{\omega}^{n-1} dx^1 dx^2 \dots dx^{n-2},$$

распространенного на каждый кусок этой гиперповерхности. Здесь, конечно, подразумевается, что u_i должны быть заменены параметрами элемента, касательного к гиперповерхности.

Немного далее мы увидим геометрическую интерпретацию этого условия; оно *выражает, что средняя кривизна гиперповерхности равна нулю.*

VIII. Теория поверхностей.

21. Предположим, что $n=3$ и пространство не особенное. Возьмем в пространстве поверхность (S) , рассматри-

ваемую как совокупность ее плоскостных касательных элементов. Для этой поверхности можно будет определить две фундаментальных формы Гаусса; из них первая будет

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

а вторая будет взятым с обратным знаком скалярным произведением абсолютного дифференциала единичного нормального вектора на вектор dx^i .

Предположим, а это предположение не сужает общности, что поверхность выражена уравнением $x^3 = 0$, и будем писать x, y, z вместо x^1, x^2, x^3 . Мы можем принять здесь $u_1 = u_2 = 0, u_3 = 1$. Ковариантные составляющие $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ абсолютного дифференциала единичного нормального вектора приводятся, поскольку дифференциалы du_i равны нулю, к виду

$$\tilde{\omega}_1 = -\frac{\sqrt{g}}{L} (\Gamma_{11}^3 dx + \Gamma_{12}^3 dy);$$

$$\tilde{\omega}_2 = -\frac{\sqrt{g}}{L} (\Gamma_{21}^3 dx + \Gamma_{22}^3 dy).$$

Но оба коэффициента Γ_{12}^3 и Γ_{21}^3 здесь равны. В самом деле, положим в уравнении (XIV) $i=1, l=2, j=3$; по определению $\mathfrak{T}_{12}^3$, данному в (XII), получим

$$\Gamma_{12}^3 + C_1^{3h} \Gamma_{h2}^3 = \Gamma_{21}^3 + C_2^{3h} \Gamma_{h1}^3.$$

Абсолютный же дифференциал вектора, расположенного в элементе $(0, 0, 1)$ и сохраняющего при вращении элемента вокруг центра фиксированные контравариантные составляющие, расположен, как мы знаем ($n^\circ 10$), в элементе, так что его 3-я контравариантная составляющая равна нулю. Если применить это замечание к вектору $(X^1, X^2, 0)$, то эта 3-я составляющая будет

$$(X^1 C_1^{3h} + X^2 C_2^{3h}) du_h;$$

следовательно, имеем $C_1^{3h} = C_2^{3h} = 0$, откуда

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3.$$

22. Установив это, получим для фундаментальных форм поверхности следующие выражения:

$$ds^2 = g_{11} dx^2 + 2g_{12} dx dy + g_{22} dy^2;$$

$$F = \frac{\sqrt{g}}{L} (\Gamma_{11}^3 dx^2 + 2\Gamma_{12}^3 dx dy + \Gamma_{22}^3 dy^2).$$

Понятия нормальной кривизны, геодезического кручения обобщаются как в евклидовом пространстве; нормальная кривизна и геодезическое кручение будут общими у двух касательных кривых. Понятия асимптотических линий, линий кривизны, главных кривизн тоже обобщаются, как и теоремы Эйлера, теорема Эннепера и т. д. Наконец, также обстоит дело с понятием сопряженных касательных: два направления (dx, dy) и $(\delta x, \delta y)$ будут сопряженными, если абсолютный дифференциал единичного нормального вектора для направления d перпендикулярен к вектору $(\delta x, \delta y)$. Соотношение между двумя сопряженными направлениями тоже инволюторно и имеет вид

$$\Gamma_{11}^3 dx \delta x + \Gamma_{12}^3 (dx \delta y + dy \delta x) + \Gamma_{22}^3 dy \delta y = 0.$$

23. Заметим, наконец, что экстремальная поверхность характеризуется тем, что ее средняя кривизна равна нулю. В самом деле, по $n^\circ 20$ (§ VII), поверхность является экстремалью, если интеграл $\iint \bar{\omega}^1 dy - \bar{\omega}^2 dx$, распространенный на каждый кусок поверхности, равен нулю. Обозначим $\bar{g}^{ij}$ контравариантные составляющие метрического тензора *поверхности*; имеем

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 dy - \bar{\omega}^2 dx &= (\bar{g}^{11} \bar{\omega}_1 + \bar{g}^{12} \bar{\omega}_2) dy - (\bar{g}^{12} \bar{\omega}_1 + \bar{g}^{22} \bar{\omega}_2) dx = \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{L} (\bar{g}^{11} \Gamma_{11}^3 + 2\bar{g}^{12} \Gamma_{12}^3 + \bar{g}^{22} \Gamma_{22}^3) dx dy. \end{aligned}$$

Итак, экстремальные поверхности характеризуются соотношением

$$\bar{g}^{11} \Gamma_{11}^3 + 2\bar{g}^{12} \Gamma_{12}^3 + \bar{g}^{22} \Gamma_{22}^3 = 0.$$

Главные же кривизны $\frac{1}{R}$ поверхности определяются уравнением

$$\left(\frac{\sqrt{g}}{L} \Gamma_{11}^3 - \frac{g_{11}}{R}\right) \left(\frac{\sqrt{g}}{L} \Gamma_{22}^3 - \frac{g_{22}}{R}\right) - \left(\frac{\sqrt{g}}{L} \Gamma_{12}^3 - \frac{g_{12}}{R}\right)^2 = 0;$$

сумма корней этого уравнения будет

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{g}} \frac{\sqrt{g}}{L} (g_{11} \Gamma_{22}^3 - 2g_{12} \Gamma_{12}^3 + g_{22} \Gamma_{11}^3) = \\ & = \frac{\sqrt{g}}{L} (\bar{g}^{11} \Gamma_{11}^3 + 2\bar{g}^{12} \Gamma_{12}^3 + \bar{g}^{22} \Gamma_{22}^3); \end{aligned}$$

здесь мы узнаем именно то выражение, равенство которого нулю определяет экстремальные поверхности.

Заметим, что предшествующие рассуждения предполагают лишь, что использованная связность полувнутренняя. Следовательно, все эти связности придают поверхности одну и ту же среднюю кривизну. Естественно, что поверхность может иметь внутренне ей присущую (*intrinsèque*) полную кривизну, лишь если она погружена в неособенное пространство.

Предшествующая теория обобщается без затруднений на гиперповерхности пространства n измерений.

24. Внутренняя геометрия (*la géométrie interne*) поверхности испытывает глубокие изменения, когда мы переходим от евклидова пространства к пространствам нами изучаемым. Поверхность получает *наведенную евклидову связность*, которая определяется:

- 1° первой фундаментальной формой ds^2 поверхности;
- 2° касательными составляющими абсолютного дифференциала вектора, касательного к поверхности, при опорном элементе, остающемся касательным к поверхности.

Вторая часть наведенной связности определяется, следовательно, формами ω_i^j ($i, j = 1, 2$), в которых u_1, u_2, u_3 , заменены на 0, 0, 1. Так как все du_i равны нулю, имеем

$$\omega_i^j = \Gamma_{i1}^j dx + \Gamma_{i2}^j dy.$$

Но здесь нет оснований ожидать равенств

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \quad \text{и} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2;$$

иными словами, поверхность обладает в общем случае *кручением*, в противоположность тому, как это происходит в евклидовом или даже в римановом пространстве. Вектор кручения T^1, T^2 в некоторой точке дается своими составляющими

$$T^1 = \frac{\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}, \quad T^2 = \frac{\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}}.$$

Только в римановом пространстве (тензор A^{ijh} нулю) кручение равно нулю у всех поверхностей.

Классическое соотношение между внутренней (interne) римановой кривизной поверхности и ее полной кривизной здесь более не существует; внутренняя риманова кривизна является линейной и неоднородной в общем случае комбинацией главных кривизин и полной кривизны поверхности, причем коэффициенты зависят только от элемента касательного к поверхности, т. е. они будут общие у двух касающихся поверхностей.

Ясно, что поверхность обладает внутренней геометрией лишь в неособенном пространстве. Тем не менее ds^2 поверхности существует всегда. Более того, мы увидим (приложение n^0 9), что, *если пространство вполне особенное и если, сверх того, его угловая метрика имеет кривизну равную нулю*, то все полувнутренние связности пространства придают произвольной поверхности одинаковую наведенную связность; итак, в этом случае поверхность допускает внутреннюю, внутренне ей присущую, геометрию (géométrie interne intrinsèque).

IX. Теория кривых.

25. Так как пространство является совокупностью элементов (un lieu d'éléments), то обосновать дифференциальную геометрию кривых можно лишь, относя внутренне геометрическим образом каждой точке данной кривой один

элемент или семейство элементов, имеющих эту точку центром: теория кривых становится теорией полученных таким образом многообразий элементов. Это отнесение может быть выполнено двумя существенно различными способами.

1° Прежде всего можно отнести каждой точке кривой все элементы, касательные в этой точке к кривой, рассматривая, таким образом, кривую как *многообразие* в смысле Ли. Если встать на эту точку зрения, классическая теория кривых полностью исчезнет; в частности, дуга кривой не будет иметь определенной длины, т. к. расстояние между двумя бесконечно-близкими точками зависит от элемента, отнесенного к первой точке. Теорию, разворачиваемую в указанном смысле, мы оставим в стороне.

2° Можно встать на иную точку зрения и отнести каждой точке данной кривой элемент *нормальный* к кривой. Линия будет иметь определенную длину; элементарная дуга ds и взаимные отношения u_i будут определены уравнениями

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{L^i}{Vg}.$$

Формулы Френе обобщаются без затруднений.

Линии, играющие роль прямых (геодетики), это — те линии, вдоль которых единичный касательный вектор остается параллельным самому себе: $\tilde{\omega}_i = 0$. Линии, осуществляющие экстремум интеграла $\int ds$, в противоположность этому, как показывает счет, который мы опускаем, характеризуются свойством

$$DA^i + H^{ik} \tilde{\omega}_k = 0.$$

Следовательно, геодетика осуществляет экстремум $\int ds$, лишь если вдоль нее вектор $\vec{A}$ остается параллельным самому себе. *А это имеет место для всех геодетик в случае, когда вектор $\vec{A}$ равен нулю во всем пространстве.*

Х. Преобразование расширения.

26. Скажем, наконец, хотя бы немного об одном интересном вопросе. И в евклидовой и в римановой геометрии, если отложить на нормалях к поверхности бесконечно-малую постоянную длину и провести через конец полученного таким образом вектора плоский элемент, параллельный плоскому элементу поверхности, то все эти плоские элементы будут касаться некоторой, общей для них, поверхности; таким образом, получаем бесконечно-малое касательное преобразование, называемое *расширением* (dilatation).

В пространствах, нами изучаемых, в общем случае такого расширения не существует. Мы покажем, что оно *существует в пространствах с вектором $\vec{A}$ равным нулю*, и что это единственные пространства, в которых оно существует.

27. Итак, отложим на нормали к элементу (x^i, u_i) постоянную длину ε ; полученная точка имеет координаты

$$x^i + \varepsilon \frac{L^i}{Vg};$$

теперь перенесем в нее параллельно элемент u_i ; величины u_i получат вариацию δu_i , определяемую выражением ($n^\circ 16$)

$$\delta u_i = u_i \frac{\delta L}{L} - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial \log g}{\partial x^h} \varepsilon \frac{L^h}{Vg} + u_k \Gamma_{i h}^k \varepsilon \frac{L^h}{Vg}.$$

Нам нужно установить, что уравнение

$$(7) \quad \delta u_i dx^i + u_i \varepsilon d \frac{L^i}{Vg} = 0$$

является следствием уравнения

$$(8) \quad u_i dx^i = 0.$$

Уравнение (7) приводится, если учесть (8), к виду

$$u_k \Gamma_{i h}^k \frac{L^h}{Vg} dx^i + u_i d \frac{L^i}{Vg} = 0$$

или

$$(9) \quad u_i (d \frac{L^i}{Vg} + \Gamma_{k h}^i \frac{L^h}{Vg} dk^k) = 0.$$

С другой стороны, имеем $u_i \tilde{\omega}^i = 0$, где

$$u_i \tilde{\omega}^i = u^i d \frac{L^i}{V^g} + A^h du_h + u_i \Gamma_{kh}^i \frac{L^h}{V^g} dx^k;$$

отсюда следует, что уравнение (9), если учесть (8), может быть записано так

$$A^h du_h - u_i \frac{L^h}{V^g} (\Gamma_{kh}^i - \Gamma_{hk}^i) dx^k = 0.$$

Наконец, учитывая соотношения (XII), получаем окончательно уравнение

$$A^h du_h - A^i u_j \Gamma_{ik}^j dx^k = 0.$$

Оно эффективно выполняется, если вектор $\vec{A}$ равен нулю. С другой стороны, ясно, что оно может иметь место для каждой поверхности, лишь если вектор $\vec{A}$ равен нулю.

Итак, мы видим, что *во многих отношениях пространства с вектором $\vec{A}$, равным нулю, приближаются к римановым пространствам.*

XI. Проблема эквивалентности кратных интегралов.

28. Мы будем говорить, что два интеграла

$$\iint F(x, y, z, p, q) dx dy$$

эквивалентны, если можно перейти от одного к другому посредством точечного преобразования. Это определение распространяется и на случай n измерений. Предположим, что два интеграла порождают оба *регулярную* проблему вариационного исчисления и что два метрических пространства, ими определяемых, не являются особенными. Необходимое и достаточное условие эквивалентности этих двух интегралов заключается в том, что оба пространства должны быть геометрически эквивалентными, т. е. что между ними существует такое точечное соответствие (а, следовательно, и соответствие элемента элементу),

что метрика и евклидова связность первого пространства посредством этого соответствия преобразуются в метрику и евклидову связность второго.

Поскольку n -мерное пространство евклидовой связности допускает группу, зависящую не более, чем от $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров, то отсюда следует, что кратный интеграл, определяющий неособенное пространство, допускает конечную группу преобразований зависящую не более, чем от $\frac{n(n+1)}{2}$ параметров. Наконец, легко показать, что максимальное число может быть достигнуто, лишь если пространство будет римановым пространством постоянной кривизны.

Вообще можно сказать, что метрика и евклидова связность неособенного пространства содержат в себе *все внутренние* присущие (intrinsèque) *свойства* интеграла, являющегося основой построенного пространства, т. е. все свойства, независимые от выбора переменных в интеграле.

29 Если пространство особенное, положение меняется. Например, уже нельзя более утверждать, *что интеграл допускает не более одной конечной группы преобразований*. Здесь имеется особенность, которая не имеет места в теории интегралов одного измерения

$$\int L(x^1, x^2, \dots, x^n; dx^1, \dots, dx^n),$$

порождающих регулярную проблему вариационного исчисления, ибо там такой интеграл всегда без исключений позволяет построить внутренним образом пространство с определенной евклидовой связностью.

Наиболее простую иллюстрацию только что отмеченной аномалии дает в пространстве трех измерений интеграл $\iint (p^2 + q^2) dx dy$, который входит в данное Риманом доказательство принципа Дирихле. В самом деле, этот интеграл допускает *бесконечную* группу точечных преобразований,

а именно

$$\begin{aligned} x' + iy' &= f(x + iy) & (f — \text{аналитическая функция}), \\ z' &= z + a & (a — \text{константа}). \end{aligned}$$

Экстремальными поверхностями являются те поверхности, у которых z гармоническая функция от x, y . Ясно, что *a priori* невозможно связать с таким интегралом определенную евклидову связность; соответствующее пространство является особенным. Мы дадим беглый очерк этого пространства.

XII. Гармоническое пространство.

30. Обозначим u, v, w однородные координаты плоскости элемента $(x, y, z; p, q)$. Имеем

$$\begin{aligned} p &= -\frac{u}{w}, & q &= -\frac{v}{w}, \\ (10) \quad L &= \frac{u^2 + v^2}{w}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial u^2} &= 2 \frac{3u^2 + v^2}{w^2}, & \frac{1}{2} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial u \partial v} &= \frac{4uv}{w^2}, & \frac{1}{2} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial v^2} &= 2 \frac{u^2 + 3v^2}{w^2}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial u \partial w} &= -4u \frac{u^2 + v^2}{w^3}, & \frac{1}{2} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial v \partial w} &= -4v \frac{u^2 + v^2}{w^3}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2(L^2)}{\partial w^2} &= 3 \frac{(u^2 + v^2)^2}{w^4}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим

$$\Delta = 4 \frac{(u^2 + v^2)^4}{w^8}, \quad g = 2 \frac{(u^2 + v^2)^2}{w^4}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{2} \frac{u^2 + v^2}{w^2}.$$

Контравариантные и ковариантные составляющие единичного нормального вектора будут

$$(11) \quad \begin{cases} l^1 = -\sqrt{2} \frac{p}{p^2 + q^2}, & l^2 = -\sqrt{2} \frac{q}{p^2 + q^2}, & l^3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ l_1 = -\sqrt{2} p, & l_2 = -\sqrt{2} q, & l_3 = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Подсчет g^{ij} и затем g_{ij} не представляет затруднений; находим

$$(12) \quad \begin{cases} g^{11} = \frac{3p^2 + q^2}{(p^2 + q^2)^2}, & g^{12} = \frac{2pq}{(p^2 + q^2)^2}, & g^{22} = \frac{p^2 + 3q^2}{(p^2 + q^2)^2}, \\ g^{13} = \frac{2p}{p^2 + q^2}, & g^{23} = \frac{2q}{p^2 + q^2}, & g^{33} = \frac{3}{2}; \end{cases}$$

далее,

$$\begin{cases} g_{11} = 3p^2 + q^2, & g_{12} = 2pq, & g_{22} = p^2 + 3q^2, \\ g_{13} = -4p, & g_{23} = -4q, & g_{33} = 6. \end{cases}$$

Отсюда выводим, что ds^2 пространства может быть приведено к следующему виду

$$(14) \quad ds^2 = (pdx + qdy - 2dz)^2 + (qdx - pdy)^2 + 2(pdx + qdy - dz)^2.$$

Далее, для вектора $\vec{A}$, длина которого равна $\sqrt{2}$, находим

$$(15) \quad \begin{cases} A^1 = \frac{-\sqrt{2} p}{p^2 + q^2}, & A^2 = \frac{-\sqrt{2} q}{p^2 + q^2}, & A^3 = -\sqrt{2}; \\ A_1 = \sqrt{2} p, & A_2 = \sqrt{2} q, & A_3 = -2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Отметим формулы

$$(16) \quad \tilde{\omega}^1 = -\sqrt{2} \frac{dp}{p^2 + q^2}, \quad \tilde{\omega}^2 = -\sqrt{2} \frac{dq}{p^2 + q^2},$$

$$\tilde{\omega}^3 = -\sqrt{2} \frac{pdp + qdq}{p^2 + q^2},$$

которые дают для величины угла между двумя бесконечно-близкими элементами с общим центром:

$$(17) \quad d\varphi^2 = 2 \frac{dp^2 + dq^2}{p^2 + q^2}.$$

Пространство это вполне особенное. В самом деле, под-считаем тензор H^{ij} , пользуясь формулой (n° 17):

$$H^{ij} = g^{ij} + A^i A^j - \frac{L}{4g^{3/2}} A_k \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k};$$

поскольку $\frac{\partial^2(L^2)}{\partial u_i \partial u_j}$ однородно и нулевого измерения относительно u, v, w , имеем

$$A_k \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} = -\frac{V\sqrt{2}}{w} \left(u \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial u} + v \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial v} + 2w \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial w} \right) = -V\sqrt{2} \frac{\partial^3(L^2)}{\partial u_i \partial u_j \partial w},$$

откуда

$$\begin{aligned} H^{ij} &= g^{ij} + A^i A^j + \frac{L}{V\sqrt{2} g^{3/2}} \frac{\partial}{\partial w} (g g^{ij}) = \\ &= g^{ij} + A^i A^j + \frac{1}{4} \frac{w^5}{(u^2 + v^2)^2} \frac{\partial (g g^{ij})}{\partial w}. \end{aligned}$$

Таким образом, находим

$$(18) \quad \begin{cases} H^{11} = \frac{2p^2}{(p^2 + q^2)^2}, & H^{12} = \frac{2pq}{(p^2 + q^2)^2}, & H^{22} = \frac{2q^2}{(p^2 + q^2)^2}, \\ H^{13} = \frac{p}{p^2 + q^2}, & H^{23} = \frac{q}{p^2 + q^2}, & H^{33} = -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

т. е. тензор H^{ij} вполне идентичен с тензором

$$\frac{1}{g} L^i L^j = l^i l^j.$$

31. Здесь не имеется внутренней евклидовой связности. Одна из полувнутренних связностей, очевидно, получится, если приравнять нулю все Γ_{ik}^j , так как тогда уравнения (XII) и (XIV) удовлетворятся. Это позволит нам вычислить среднюю кривизну, внутренне свойственную поверхности.

Прежде всего имеем

$$(19) \quad ds^2 = (p^2 + q^2) (dx^2 + dy^2).$$

Вторая фундаментальная форма, вычисленная с использованием указанной полувнутренней связности, будет

$$-(\tilde{w}_1 dx + \tilde{w}_2 dy + \tilde{w}_3 dz).$$

Пользуясь обозначениями Монжа, находим

$$(20) \quad F = V\sqrt{2} (r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2);$$

отсюда выводим для средней кривизны, внутренне свойственной поверхности, следующее выражение

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \sqrt{2} \frac{r+t}{p^2+q^2}.$$

Гармонические поверхности—экстремали рассматриваемого интеграла—это те поверхности, средняя кривизна которых равна нулю.

32. Угловая метрика (17) этого пространства имеет кривизну, равную нулю. Согласно теореме, доказываемой в дополнении ($n^\circ 9$), каждая поверхность пространства допускает внутреннюю, внутренне ей присущую, евклидову связность (connexion euclidienne interne intrinsèque). Мы ее сейчас и определим.

Будем исходить из полувнутренней евклидовой связности, которой мы уже пользовались, и рассмотрим на поверхности два координатных вектора $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$, пространственные контравариантные составляющие которых будут

$$\begin{aligned}\vec{I}_1: & 1, 0, p; \\ \vec{I}_2: & 0, 1, q;\end{aligned}$$

их ковариантные составляющие будут

$$\begin{aligned}\vec{I}_1 & : q^2 - p^2, -2pq, 2p; \\ \vec{I}_2 & : -2pq, p^2 - q^2, 2q.\end{aligned}$$

В общем случае контравариантные составляющие абсолютного дифференциала вектора X^i будут

$$dX^i + X_k \omega^{ki} = dX^i - \frac{1}{2} X_h dg^{hi} = \frac{1}{2} dX^i + \frac{1}{2} g^{hi} dX_h.$$

Прилагая эту формулу к векторам $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$, находим для контравариантных составляющих $D\vec{I}_1$

$$\frac{-pdp + qdq}{p^2 + q^2}, \quad \frac{-qdp + pdq}{p^2 + q^2}, \quad 0.$$

Нормальная составляющая этого вектора будет $\sqrt{2} dp$; следовательно, его проекция на элемент (p, q) будет иметь следующие составляющие по векторам $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$

$$\frac{pdp + qdq}{p^2 + q^2}, \quad \frac{qdp - pdq}{p^2 + q^2}.$$

Так же находим, что проекция $D\vec{l}_2$ на элемент (p, q) имеет следующие составляющие по векторам $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$:

$$\frac{pdq - qdp}{p^2 + q^2}, \quad \frac{pdp + qdq}{p^2 + q^2}.$$

Итак, в наведенной евклидовой связности на поверхности абсолютный дифференциал вектора $X\vec{l}_1 + Y\vec{l}_2$ имеет следующие контравариантные составляющие:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX + \frac{pdp + qdq}{p^2 + q^2} X + \frac{pdq - qdp}{p^2 + q^2} Y, \\ dY + \frac{qdp - pdq}{p^2 + q^2} X + \frac{pdp + qdq}{p^2 + q^2} Y. \end{array} \right.$$

Величины $\bar{\Gamma}_{ik}^j$, определяющие внутреннюю (interne) евклидову связность, даются, следовательно, соотношениями

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{pdp + qdq}{p^2 + q^2} = \bar{\Gamma}_{11}^1 dx + \bar{\Gamma}_{12}^1 dy = \bar{\Gamma}_{21}^2 dx + \bar{\Gamma}_{22}^2 dy; \\ \frac{pdq - qdp}{p^2 + q^2} = \bar{\Gamma}_{21}^1 dx + \bar{\Gamma}_{22}^1 dy = -\bar{\Gamma}_{11}^2 dx - \bar{\Gamma}_{12}^2 dy. \end{array} \right.$$

Вектор кручения имеет, как это следует из (19), контравариантные составляющие

$$(23) \quad \begin{aligned} T^1 &= \frac{\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^1}{p^2 + q^2} = \frac{q(r+t)}{(p^2 + q^2)^2}; \\ T^2 &= \frac{\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^2}{p^2 + q^2} = \frac{-p(r+t)}{(p^2 + q^2)^2}. \end{aligned}$$

Итак, величина вектора кручения равна $\frac{r+t}{p^2 + q^2}$, т. е. рав-

на произведении средней кривизны поверхности на $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Его направление совпадает с направлением линий уровня $z = \text{const.}$ на поверхности. Что же касается кривизны поверхности, то, просчитав, констатируем, что она равна нулю.

33. Наконец, можно установить, что единичный вектор, касательный к линиям уровня, остается всегда сам себе параллельным. Для этого достаточно приложить формулы (21) к этому вектору, имеющему контравариантные составляющие:

$$X = \frac{q}{p^2 + q^2}, \quad Y = -\frac{p}{p^2 + q^2}.$$

Этого достаточно, чтобы доказать, что поверхность является двумерным пространством с абсолютным параллелизмом. Линии уровня образуют семейство геодезик, параллельных между собой. Если мы на мгновение будем рассматривать x, y, z как прямоугольные координаты обычного пространства, мы видим из (19), что поверхность допускает конформное отображение на свою ортогональную проекцию на плоскость xy . Следовательно, на этой проекции геодезики поверхности изображаются траекториями, пересекающимися под постоянным углом линии уровня.

Ясно, что при произвольном аналитическом преобразовании, выполненном над $x + iy$, только что изложенные геометрические свойства сохраняются, как это и следовало ожидать. Добавим, наконец, что, если выбрать в каждой точке поверхности прямоугольную локальную систему референции, у которой первая ось касательна к линии уровня, проходящей через эту точку, то локальные координаты точки, бесконечно близкой к M , будут, как это следует из (14),

$$q \, dx - p \, dy \quad \text{и} \quad p \, dx + q \, dy = dz.$$

Мы видим, что, если перемещаться вдоль линии уровня, элементарная дуга будет равна $\frac{dz}{dn} \sqrt{dx^2 + dy^2}$, где $\frac{dz}{dn}$ обозначает обычную производную по нормали.

Можно было бы изучить пространство $(n+1)$ измерений, основанное на интеграле

$$\int (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Если $n > 2$, это пространство не будет особенным. Изучение его представило бы, без сомнения, большой интерес.

Дополнение.

1. В настоящем дополнении мы намереваемся развернуть вычисления, приводящие к евклидовой связности метрического пространства, отнесенного кратному интегралу. Мы начнем, как это было выше объяснено ($n^\circ 18$), с решения уравнений (XIV):

$$(1) \quad \mathfrak{L}_{il}^j \equiv \Gamma_{il}^j - \Gamma_{li}^j + u_k (C_i^{jh} \Gamma_{hl}^k - C_l^{jh} \Gamma_{hi}^k) = \frac{L^j}{L} (u_i \sigma_l - u_l \sigma_i)$$

с h вспомогательными неизвестными σ_i , подчиненными соотношению

$$(2) \quad u_k \sigma^k = 0.$$

Неизвестные Γ_{ik}^j должны, кроме того, удовлетворять соотношениям (XIII)

$$(3) \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l} = -\Gamma_{l i}^{j} - \Gamma_{l j}^{i}.$$

Уравнения (1) мы запишем, введя тензор A^{ijk} , в следующей эквивалентной форме:

$$(1') \quad \mathfrak{L}^{ijl} \equiv \Gamma^{ijl} - \Gamma^{lji} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k (A^{ijh} \Gamma_h^{kl} - A^{ljh} \Gamma_h^{ki}) = \\ = \frac{L^j}{L} (L^i \sigma^l - L^l \sigma^i).$$

Мы будем пользоваться соотношениями

$$(4) \quad \frac{\sqrt{g}}{L} u_k A^{ijk} = 0, \quad \frac{\sqrt{g}}{L} u_k A^{ikh} = \frac{L^l}{\sqrt{g}} A^h, \quad \frac{g}{L^2} u_i u_k A^{ikh} = A^h.$$

2. Введем составляющие γ_{ik}^j римановой связности, которая получается, если рассматривать в g_{ij} параметры u_i как фиксированные: имеем

$$(5) \quad \gamma_{ik}^j = \gamma_{ki}^j, \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l} = -\gamma_{il}^{ij} - \gamma_{li}^{ji}.$$

Следовательно, можно положить

$$(6) \quad \Gamma^{ijl} = \gamma^{ijl} + S^{ijl},$$

где неизвестные S^{ijl} удовлетворяют согласно (3) и (5) соотношениям

$$(7) \quad S^{ijl} + S^{jil} = 0.$$

Уравнение (1') принимает тогда следующую форму

$$(1'') \quad S^{ijl} + S^{jli} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k (A^{ijh} \Gamma_h^{kl} - A^{ljh} \Gamma_h^{ki}) = \\ = \frac{L^j}{g} (L^i \sigma^l - L^l \sigma^i);$$

выполняя последовательно два раза циклическую перестановку индексов i, j, l и складывая три уравнения таким образом полученные, непосредственно находим

$$S^{ijl} + S^{jli} + S^{lji} = 0.$$

Это позволяет написать уравнение (1'') в следующем виде

$$(8) \quad S^{ijl} - \frac{\sqrt{g}}{L} u_k (A^{ijh} S_h^{kl} - A^{ljh} S_h^{ki}) + \frac{L^j}{g} (L^i \sigma^l - L^l \sigma^i) = \\ = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k (A^{ijh} \gamma_h^{kl} - A^{ljh} \gamma_h^{ki}).$$

3. Введем новые вспомогательные неизвестные

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi^{ij} = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k S^{ikj}, \\ \xi^i = A_k \xi^{ki} = \frac{\sqrt{g}}{L} A_k u_h S^{kht}, \\ \eta^i = \frac{g}{L^2} u_k u_h \Gamma^{ikh} = \frac{\sqrt{g}}{L} u_h \xi^{ih} + \frac{g}{L^2} u_k u_h \gamma^{ikh}. \end{array} \right.$$

Отметим, что мы будем иметь

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{\omega}_i &= \sqrt{g} d \frac{u_i}{L} + \left(\frac{u_i}{L} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^h} - \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma_{ih}^k - \xi_{ih} \right) dx^h, \\ \bar{\omega}^i &= \frac{1}{\sqrt{g}} dL^i + \left(L^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^h} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{ki}_h - \xi^i_h \right) dx^h. \end{aligned} \right.$$

Умножим (8) на $\frac{\sqrt{g}}{L}$ и суммируем; тогда из (4) и (9) получаем

$$(11) \quad \xi^{lj} - \frac{L^j}{\sqrt{g}} \xi^l + A^{ljh} \eta_h + \frac{L^j}{\sqrt{g}} \sigma^l = \frac{L^j}{L} u_k A_h \gamma^{hkl}.$$

Умножим на A_l и просуммируем; получаем

$$(12) \quad \xi^j - \frac{L^j}{\sqrt{g}} A_l \xi^l + A_l A^{ljh} \eta_h + \frac{L^j}{\sqrt{g}} A_l \sigma^l = \frac{L^j}{L} u_k A_l A_h \gamma^{hkl}.$$

Умножим, наконец, на A_j и просуммируем; получаем

$$A^j \xi_j + A_j A_l A^{ljh} \eta_h = 0,$$

откуда согласно (12)

$$(13) \quad \xi^j + \left(A_l A^{ljh} + \frac{L^j}{\sqrt{g}} A_l A_k A^{ikh} \right) \eta_h + \frac{L^j}{\sqrt{g}} A_l \sigma^l = \\ = \frac{L^j}{L} u_k A_h A_l \gamma^{hkl}.$$

Вставляя далее это в (11), находим

$$(14) \quad \xi^{lj} + \left(A^{ljh} + \frac{L^j}{\sqrt{g}} A_k A^{klh} + \frac{L^j L^l}{g} A_i A_k A^{ikh} \right) \eta_h + \\ + \frac{L^j}{\sqrt{g}} \sigma^l + \frac{L^j L^l}{g} A_k \sigma^k = \frac{L^l}{L} u_k A_h \gamma^{hkl} + \frac{L^j L^l}{g} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k A_h A_l \gamma^{hkl}.$$

Наконец, из соотношения (8) мы получим S^{ij}

$$(15) \quad S^{ij} - A^{ijh} \xi_h^i + A^{ljh} \xi_h^i + \frac{L^j}{g} (L^i \sigma^l - L^l \sigma^i) = \\ = \frac{\sqrt{g}}{L} u_k (A^{ijh} \gamma_h^{kl} - A^{ljh} \gamma_h^{ki});$$

Это уравнение дает S^{lij} , выраженное, если учитывать (14) через η_i и σ_i .

3. Умножим (15) на $\frac{g}{L^2} u_i u_j$ и просуммируем; получаем

$$(16) \quad \eta^l - \frac{g}{L^2} u_i u_j \gamma^{lij} - \xi^l + \frac{L^l}{L} u_k \xi^k + \sigma^l = \\ = \frac{V\bar{g}}{L} u_k A_h \gamma^{hkl} - \frac{V\bar{g} L^l}{L^2} u_i u_k A_h \gamma^{hki},$$

или, заменяя ξ^l их значениями, имеем

$$(17) \quad \sigma^l + (g^{lh} + A_k A^{klh}) \eta_h = \left(\frac{g}{L^2} u_i u_j + \frac{V\bar{g}}{L} u_j A_i \right) \gamma^{ijl} - \\ - \frac{V\bar{g}}{L^2} L^l u_i u_k A_h \gamma^{hki}.$$

Наконец, уравнение (2) дает

$$(18) \quad \frac{1}{V\bar{g}} L^h \eta_h = \frac{g^{3/2}}{L^3} u_i u_j u_k \gamma^{ijk}.$$

Итак, предшествующие формулы нам дают Γ_{ik}^j и σ_i , выраженные через n произвольных величин η_h , связанных соотношением (18).

4. Внося в (13) значения, полученные для σ^l , находим

$$(19) \quad \xi^j = \left(\frac{L^j}{V\bar{g}} A^h - A_i A^{ijh} \right) \eta_h - \frac{V\bar{g} L^j}{L^2} u_i u_k A_h \gamma^{ikh},$$

откуда, пользуясь (11), получаем

$$(20) \quad \xi^{ij} = (-A^{ijh} + \frac{L^j}{V\bar{g}} g^{lh} + \frac{L^j L^i}{g} A^h) \eta_h - \frac{V\bar{g} L^j}{L^2} u_i u_k \gamma^{ikl},$$

В частности, имеем:

$$\xi_j^l = (-A_j^{lh} + \frac{V\bar{g}}{L} u_j g^{lh} + \frac{L^l}{L} u_j A^h) \eta_h - \frac{g^{3/2}}{L^3} u_i u_j u_k \gamma^{ikl}.$$

Образуем контрактированный тензор; получаем

$$\xi_l^l = (-A_l^{lh} + \frac{L^h}{V\bar{g}} + A^h) \eta_h - \frac{g^{3/2}}{L^3} u_i u_j u_k \gamma^{ijk}$$

или, применяя (18) и (XI) ($n^\circ 15$), имеем

$$(21) \quad \xi_l^i = (A^h - A_l^{lh}) \eta_h = 0.$$

5. Во всем предшествующем мы рассматривали лишь полувнутренние связности. Мы докажем сейчас для этих связностей теорему, которой мы воспользовались в $n^\circ 19$. Возьмем формулу (10), дающую нам

$$\tilde{\omega}^i = \frac{1}{\sqrt{g}} dL^i + \left(L^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^h} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{ki}_h - \xi^i_h \right) dx^h.$$

Если рассматривать u_i как функции от x^i , то коэффициент при dx^i в $\tilde{\omega}^i$ будет

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{dL^i}{dx^i} + L^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{ki}_i - \xi^i_i,$$

или, учитывая (21), получаем после суммирования по i

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{dL^i}{dx^i} + L^i \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^i} + \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{ki}_i.$$

Мы сейчас покажем, что два последних члена уничтожаются. Для этого нужно вычислить сумму $u_k \gamma^{ki}_i$. Имеем

$$\frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{ki}_i = \frac{L^k}{\sqrt{g}} g^{ih} \gamma_{khi} = \frac{1}{2} \frac{L^k}{\sqrt{g}} g^{ih} \left(\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} \right);$$

но

$$g^{ih} \frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i} = -g_{kh} \frac{\partial g^{ih}}{\partial x^i}; \quad g^{ih} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} = -g_{ik} \frac{\partial g^{ih}}{\partial x^h};$$

$$g^{ih} \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{g}}{L} u_k \gamma^{ki}_i &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{L} u_h \frac{\partial g^{ih}}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g}}{L} u_i \frac{\partial g^{ih}}{\partial x^h} - L^k \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k} = \\ &= -L^k \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Итак, окончательно получаем формулу

$$(22) \quad \frac{\partial \tilde{\omega}^i}{\partial dx_i} = \frac{1}{V\bar{g}} \frac{dL^i}{dx^i}$$

или

$$\begin{aligned} V\bar{g}(\tilde{\omega}^1 dx^2 dx^3 \dots dx^n - \tilde{\omega}^2 dx^1 dx^3 \dots dx^n + \dots) = \\ = \frac{dL^i}{dx^i} dx^1 dx^2 \dots dx^n. \end{aligned}$$

Этот результат относится ко всем *полу-внутренним* евклидовым связностям.

6. Также без затруднений можно проверить соотношение

$$\frac{V\bar{g}}{L} u_i \tilde{\omega}^i = 0;$$

оно запишется

$$\frac{1}{L} u^i dL^i + \left(V\bar{g} \frac{\partial V\bar{g}}{\partial x^h} + \frac{g}{L^2} u_i u_k \gamma^{ki}_h - \frac{V\bar{g}}{L} u_i \xi^i_h \right) dx^h = 0;$$

но из (9) и (7) имеем

$$u_i \xi^i_h = \frac{V\bar{g}}{L} u_i u_k S^{ik}_h = 0;$$

$$\frac{1}{L} u_i dL^i = \frac{1}{L} (dL - L^i du_i) = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial x^h} dx^h;$$

$$\begin{aligned} \frac{g}{L^2} u_i u_k \gamma^{ki}_h &= -\frac{1}{2} \frac{g}{L^2} u_i u_k \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^h} = -\frac{1}{2} \frac{g}{L^2} \frac{\partial \frac{L^2}{g}}{\partial x^h} = \\ &= -\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial x^h} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^h}; \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения, убеждаемся в правильности указанного соотношения.

7. Приступим, наконец, к полному определению *внутренне-присущей* (intrinsèque) евклидовой связности, когда она существует. Она получается приравниванием нулю ко-

эффицентов δ^l . Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$(23) \quad H^{lk} \eta_k = \left(\frac{g}{L^2} u_i u_j + \frac{Vg}{L} u_j A_i \right) \gamma^{ijl} - \frac{Vg}{L^2} L^l u_i u_h A_k \gamma^{ikh},$$

в которые входит симметрический тензор H^{ij} , определенный в n° 17:

$$H^{ij} = g^{ij} + A_k A^{kij}.$$

Как мы видели, условием того, что пространство—вполне особенное, является равенство

$$H^{ij} = \frac{L^i L^j}{g}.$$

Это условие можно выразить в простой геометрической форме. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{X}$. Заставим его опорный элемент бесконечно-мало повернуться вокруг центра; пусть Ω вектор с контравариантными составляющими

$$\tilde{\omega}^i = Vg d \frac{u_i}{L},$$

представляющий абсолютный дифференциал единичного нормального вектора. Пусть, наконец, $D\vec{X}$ обозначает абсолютный дифференциал вектора $\vec{X}$, когда контравариантные составляющие этого вектора фиксированы. Имеем:

$$\vec{A} D\vec{X} = A_i X_k C^{irh} du_h = A_i X_k A^{rih} \tilde{\omega}_h,$$

$$\vec{\Omega} \vec{X} = g^{kh} X_k \tilde{\omega}_h,$$

откуда

$$\vec{A} D\vec{X} + \vec{\Omega} \vec{X} = (g^{kh} + A_i A^{ikh}) X_k \tilde{\omega}_h = H^{rh} X_k \tilde{\omega}_h.$$

Необходимое и достаточное условие того, что эта величина тождественно равна нулю, не заключается в равенстве тензора H^{kh} нулю, так как формы $\tilde{\omega}_h$ не являются линейно независимыми. В самом деле, они связаны соотношением

$$L^h \tilde{\omega}_h = 0.$$

Это условие заключается просто в том, что $H^{kh} X_k$ для данного вектора $\vec{X}$ имеет вид ρL^h , где ρ является линейной формой $\rho^k X_k$ от X_i ; итак, имеем, учитывая симметрию тензора H^{ij} ,

$$H^{kh} = \rho^k L^h = \rho^h L^k = \rho L^k L^h;$$

но равенство

$$H^{kh} u_h = g^{kh} u_h$$

дает

$$\rho L L^h = \frac{L L^h}{g} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{1}{g};$$

следовательно, искомое условие будет таково

$$H^{kh} = \frac{L^k L^h}{g};$$

оно прямо выражает, что пространство—вполне особенное. Итак, соотношение

$$(24) \quad \vec{A} D\vec{X} + \vec{\Omega} \vec{X} = 0$$

выражает необходимое и достаточное условие того, что пространство—вполне особенное.

8. Рассмотрим в заключение еще одну, последнюю, проблему. Исследуем, в каком случае произвольная гиперповерхность данного *особенного* пространства допускает *внутреннюю*, внутренне ей присущую, геометрию (*géométrie interne intrinsèque*). Для этого необходимо и достаточно, чтобы проекция абсолютного дифференциала вектора, касательного к элементу (u_i), на этот элемент была независима от *полувнутренней* связности, приданной пространству, иными словами, была бы независима от параметров η_k .

Пусть S^{lijk} обозначает коэффициент при η_k в выражении S^{lij} ; необходимо и достаточно, чтобы форма

$$(25) \quad \alpha_i X_i Y_j \eta_k S^{lijk}$$

от четырех серий переменных α , X , Y , η была равна нулю во всех случаях, когда

$$(26) \quad L^h \alpha_h = 0, \quad L^h X_h = 0, \quad L^h Y_h = 0, \quad L^h \eta_h = 0.$$

Но из (15) имеем

$$S^{ij} = A^{ijh} \xi_h^i - A^{ijh} \xi_h^j + \frac{L^j}{g} (L^i \sigma^i - L^j \sigma^j) + \dots$$

От членов вида $\frac{L^j}{g} (L^i \sigma^i - L^j \sigma^j)$ можно отвлечься, так как они образуют в форме (25) часть, обращающуюся тождественно в нуль в силу (26). С другой стороны, из (14) после отбрасывания членов, не изменяющих формы (25), получаем

$$\xi_h^i = -A_h^{ik} \eta_k,$$

откуда заключаем, что форма (25) может быть заменена формой

$$(25') \quad \alpha_i X_i Y_j \eta_k (A^{ijh} A_h^{ik} - A^{ijh} A_h^{lk}).$$

Эта форма обращается в нуль, когда η_k заменяется на u_k , т. е. она обращается в нуль в силу только трех первых уравнений (26); то же можно констатировать при замене Y_j на u_j . Следовательно, форма

$$(27) \quad \alpha_i X_i (A^{ijh} A_h^{ik} - A^{ijh} A_h^{lk})$$

должна обращаться в нуль всякий раз, когда

$$(28) \quad L^k \alpha_k = 0, \quad L^k X_k = 0.$$

Отсюда выводим соотношения вида

$$(29) \quad A^{ijh} A_h^{ik} - A^{ijh} A_h^{lk} = L^i P^{jik} - L^j P^{ilk}.$$

Умножая на u_i и суммируя, получим

$$P^{jik} = L^j a^{ik} + L^i b^{jk},$$

где

$$a^{ik} = \frac{1}{g} A_h^{ik} A_h^{hik},$$

откуда

$$(30) \quad A^{ijh} A_h^{ik} - A^{ijh} A_h^{lk} = L^j \left(\frac{L^i}{g} A_h^{ik} - \frac{L^i}{g} A_h^{lk} \right).$$

Таково искомое соотношение.

Положим

$$\frac{\partial^3}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \left(\frac{1}{2} L^2 \right) = F^{ijk} \text{ (третья производная функции } F = \frac{1}{2} L^2);$$

из (X) имеем

$$A^{ijk} = g^{ij} A^k - \frac{L}{2g^{3/2}} F^{ijk}.$$

Итак, соотношение (30) напишется окончательно так

$$(31) \quad L^{ij} A_n A^{hik} - L^{ij} A_h^{hik} A + \frac{L}{4g^2} (F^{ljh} F_h^{ik} - F^{ijh} F_h^{lk}) = 0.$$

9. Предположим, что пространство вполне особенное. Тогда имеем

$$A_n A^{hik} = - \frac{L L^{ik}}{g},$$

и, следовательно, соотношение (31) принимает форму

$$(32) \quad \frac{g_{hm}}{g} (F^{ljh} F^{ikm} - F^{ijh} F^{lkm}) = 4 (L^{ik} L^{lj} - L^{ij} L^{lk}).$$

Это соотношение выражает, что угловая метрика $d\varphi^2$ пространства имеет кривизну равную нулю.

Чтобы доказать это, рассмотрим сначала риманову метрику вида

$$(33) \quad ds^2 = (dx^0)^2 + (x^0)^2 \bar{g}_{ij} dx^i dx^j,$$

где $\bar{g}_{ij}$ не зависят от x^0 .

Нетрудно показать, что составляющие R_{lijk} тензора Римана, у которых один из индексов равен нулю, все равны нулю.

Что касается остальных составляющих, то они даются формулой

$$R_{lijk} = (x^0)^2 (r_{lijk} - \bar{g}_{ij} \bar{g}_{lk} + \bar{g}_{lk} \bar{g}_{ij}),$$

где r_{lijk} обозначает тензор Римана, относящийся к форме $\bar{g}_{ij}$.

Итак, чтобы метрика $\bar{g}_{ij} dx^i dx^j$ имела кривизну, равную

нулю, необходимо и достаточно, чтобы

$$R_{lijk} = (x^0)^2 (\bar{g}_{ij} \bar{g}_{lk} - \bar{g}_{li} \bar{g}_{jk}),$$

что можно еще выразить так: риманова форма $R_{lijk} p^{li} p^{jk}$ должна быть равна взятому с обратным знаком произведению $(x^0)^2$ на квадрат бивектора p^{ij} в метрике $\bar{g}_{ij} dx^i dx^j$.

Приложим это замечание к вспомогательной римановой метрике

$$(34) \quad ds^2 = dL^2 + L^2 d\varphi^2 = g g^{ij} du_i du_j,$$

где L играет роль переменной x^0 и где $d\varphi^2$ (форм. VIII) определяет некоторую метрику от $n-1$ переменных $\frac{u_1}{u_n}, \frac{u_2}{u_n}, \dots, \frac{u_{n-1}}{u_n}$. Квадрат величины бивектора в метрике $d\varphi^2$ равен

$$\frac{L^{ij} L^{lk} - L^{ij} L^{lk}}{L^2} p_{ii} p_{jk}.$$

Итак, чтобы метрика $d\varphi^2$ имела кривизну, равную нулю, необходимо и достаточно, чтобы составляющие R^{lijk} тензора Римана формы (34) были даны выражениями

$$(35) \quad R^{lijk} = -L^2 \frac{L^{ij} L^{lk} - L^{ij} L^{lk}}{L^2} = -L^{ij} L^{lk} + L^{ij} L^{lk}.$$

Подсчет же тензора Римана для (34) выполняется легко, т. к. коэффициенты при $du_i du_j$ являются не чем иным, как F^{ij} , и мы находим

$$R^{lijk} = -\frac{1}{4} \frac{g_{hm}}{g} (F^{ljh} F^{ikm} - F^{ijh} F^{lkm}),$$

а это, если учесть (32), как раз и имеет значение, данное в (35). Итак, имеем следующую замечательную теорему:

Теорема. Для того, чтобы во вполне особенном пространстве каждая гиперповерхность допускала внутреннюю, внутренне ей присущую, геометрию, необходимо и достаточно, чтобы угловая метрика этого пространства имела кривизну равную нулю.

Этот же счет показывает, что необходимое и достаточное условие того, что угловая метрика пространства имеет кривизну равную нулю, дается соотношениями

$$(36) \quad g_{hm} (F^{ljh} F^{ikm} - F^{ijh} F^{lkm}) = 0.$$

СОДЕРЖАНИЕ.

	<i>Стр.</i>
Э. Картан. Группы голономии обобщенных пространств.	61
Введение	63
I. Общие теоремы	65
II. Группы голономии двумерных метрических пространств без кручения	73
III. Трёхмерные метрические пространства без кручения	77
IV. Классификация трёхмерных римановых пространств по их группам голономии	82
V. Классификация трёхмерных пространств Вейля по их группам голономии	92
VI. Группы голономии трёхмерных конформных нормальных пространств	96
VII. Группы голономии плоскостей проективной нормальной связности	104
VIII. Группы голономии и топология	108
Э. Картан. Теория групп и геометрия	111
Э. Картан. Метрические пространства, основанные на понятии площади,	143
I. Введение	145
II. Первые метрические понятия, связанные с кратным интегралом	152
III. Определение метрики в окрестности каждого элемента пространства	156
IV. Угловая метрика в некоторой точке	160
V. Вектор $\vec{A}$ и тензор A^{ijk}	161
VI. Полное определение евклидовой связности	164
VII. Экстремальные гиперповерхности	167
VIII. Теория поверхностей	169
IX. Теория кривых	173
X. Преобразование расширения	175
XI. Проблема эквивалентности кратных интегралов	176
XII. Гармоническое пространство	178
Дополнение	184



Отдельный оттиск из книги „VIII Международный Кон-
курс на соискание премии имени Н. И. Лобачевского“.
